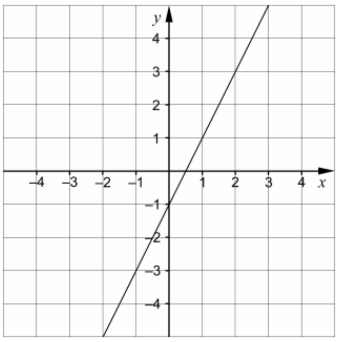
Träna inför NP

Ma 2b

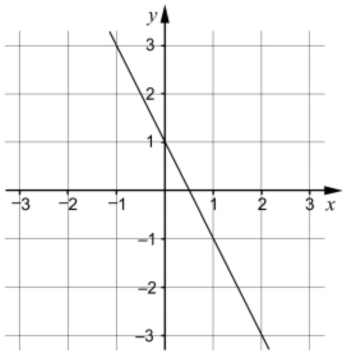
Algebra och linjära modeller

1. Vilka av följande funktioner A–F hör till grafen? E

a)



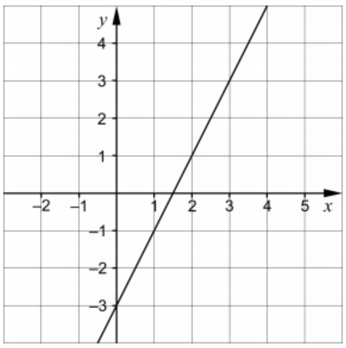
b)



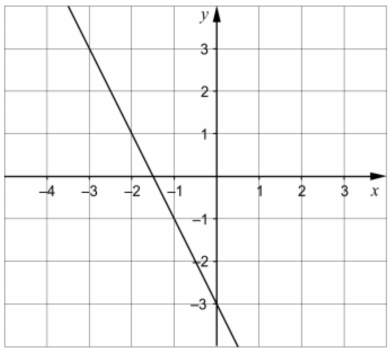
a)	b)
A) $y = -0{,}5x + 0{,}5$	A) $y = 2x + 1$
B) $y = 2x - 1$	B) $y = -2x + 1$
C) $y = -0{,}5x + 1$	C) $y = -0{,}5x + 1$
D) $y = -2x - 1$	D) $y = 0{,}5x + 1$
E) $y = 2x + 0{,}5$	E) $y = 0{,}5x - 1$
F) $y = 0{,}5x - 1$	F) $y = x + 0{,}5$

2. Bestäm ekvationen för linjen i figuren på formen $y = kx + m$ E

a)



b)



3. En rät linje går genom punkterna (0, 2) och (4, 0). E

a) Rita linjen i ett koordinatsystem.

b) Ange linjens ekvation.

4. Bestäm en ekvation för den räta linje som går genom punkterna E

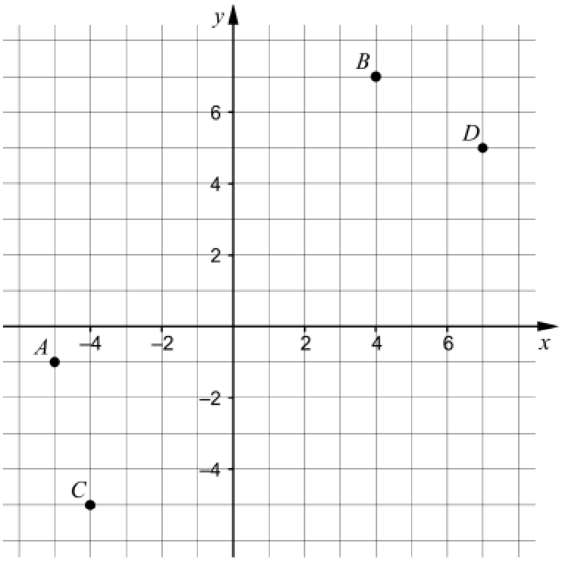
a) (1, 4) och (5, 8) b) (6, 11) och (10, 16) c) (2, 26) och (7, 6)

5. En rät linje går genom punkten (3, 1) och har riktningskoefficienten $k = -2$. E

a) Rita linjen i ett koordinatsystem.

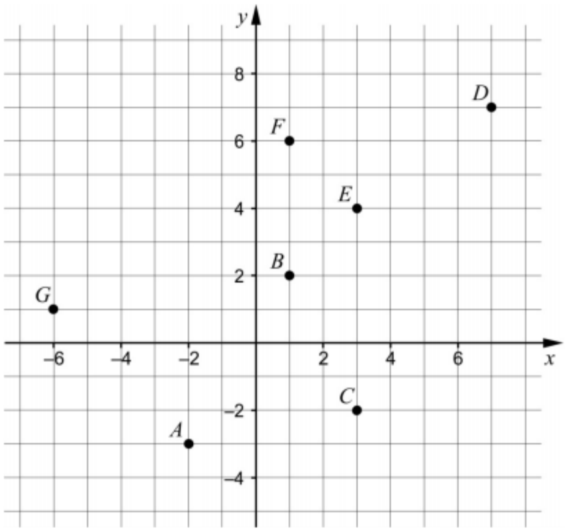
b) Bestäm linjens ekvation.

6. En linje L_1 ritas genom punkterna A och B. En annan linje L_2 ritas genom punkterna C och D. E



Är linjerna L_1 och L_2 parallella? Motivera ditt svar.

7. E



a) Två av punkterna A–G ligger på grafen till $y = 3x + 3$. Vilka?

b) En rät linje går genom punkten B och skär y-axeln i punkten $(0, 4)$. Bestäm linjens ekvation på formen $y = kx + m$.

8. Lös ekvationssystemet E

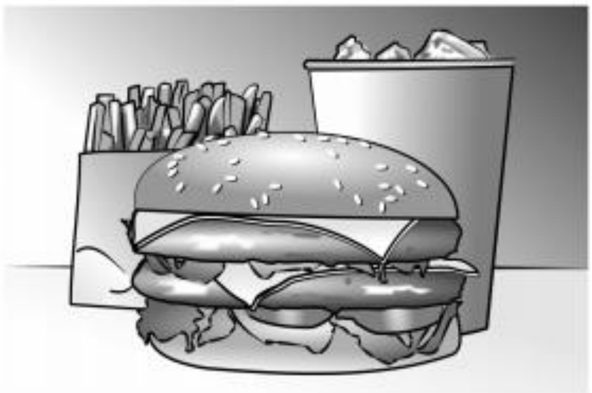
a) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y + 2x = 1 \\ y - 5x = 29 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2y - 3x = 30 \\ 2y + x = -2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - y = -9 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

9. Familjerna Alm och Bok ska äta middag på en pizzeria. Familjen Alm beställer två Vesuvio och tre Margherita och betalar 345 kr. Familjen Bok beställer en Vesuvio och två Margherita och betalar 205 kr. E

Vad kostar en Vesuvio respektive en Margherita?

10. Emma ska äta hamburgare med mamma, pappa och lillasyster. De beställer 2 skrovmål och 2 barnmenyer. För detta får de betala 182 kr. Bakom dem i kön står Johannes med sina 3 pojkar. Han beställer 1 skrovmål och 3 barnmenyer och betalar 155 kr. E



Vad kostar skrovmålet respektive barnmenyn?

11. En rät linje har riktningskoefficienten $k = 1{,}2$ och skär y-axeln i punkten $(0, 3)$. E

Avgör om punkten $(175, 207)$ ligger på linjen.

12. I en butik kostar äpplen x kr/kg och apelsiner y kr/kg. E C

Frukternas priser ingår i följande ekvationssystem: $\begin{cases} 2x + 3y = 69 \\ x + 2y = 42 \end{cases}$

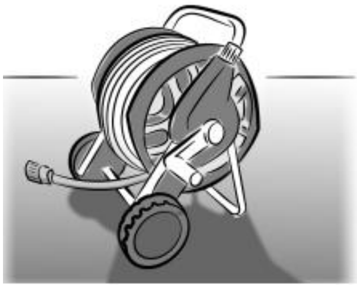
a) Lös ekvationssystemet ovan.

b) Förklara med ord hur ekvationen $x + 2y = 42$ ska tolkas i detta sammanhang.

13. På ett byggvaruhus kan man köpa vagnar med tillhörande slang. Slangarna kan ha olika längd. Nedan visas priset för en vagn som säljs med två olika längder på slangen.

E C

Slangens längd x	20 m	45 m
Priset P för vagn med slang	359 kr	499 kr



Priset P kan beskrivas av det linjära sambandet $P = ax + b$
där P är priset i kronor för vagn med slang och x är slangens längd i meter.

a) Beräkna värdena på konstanterna a och b.

b) Vad betyder konstanterna a och b i detta sammanhang?

14. Det var marknad i Karesuando. Timo sålde blåbärssaft. Han hade små flaskor som kostade 50 kr och stora som kostade 130 kr. De små flaskorna innehöll en liter och de stora tre liter. När dagen var slut hade han sålt 100 flaskor och fått in 9 240 kr.

E C

Hur många liter saft hade han sålt?

15. För att kunna träna med rätt intensitet är det bra att känna till sin maxpuls. Till exempel är det lämpligt att ha en puls som är cirka 70 % av maxpulsen vid konditionsträning. Tabellen visar hur den teoretiska maxpulsen varierar med åldern.

E C

Ålder (år)	Maxpuls (slag/minut)
25	195
30	190
35	185
40	180
45	175
50	170
55	165
60	160
65	155
70	150

a) Använd tabellen och uppskatta maxpulsen för en tjugoåring.

b) Sambandet mellan maxpulsen och åldern tycks vara linjärt. Förklara hur man kan avgöra detta med hjälp av tabellen.

c) Bestäm den funktion som beskriver sambandet mellan maxpulsen y slag/minut och åldern x år.

16. En rät linje har ekvationen $3x + 2y + 1 = 0$. C

Bestäm koordinaterna för någon punkt på linjen.

17. För ett linjärt ekvationssystem gäller följande: C

- Den ena ekvationen är $2x + 3y = 23$
- Den andra ekvationen innehåller både x och y
- Ekvationssystemet har endast en lösning
- För lösningen gäller att $x = 4$

Ge ett exempel på hur den andra ekvationen kan se ut och ange ekvationssystemets lösning.

18. Fia springer på ett löpband som kan ställas in på olika hastigheter. På en display kan hon avläsa hur mycket energi hon förbrukar under ett träningspass på löpbandet. Energin anges i enheten kcal. C

Fia brukar först ställa in löpbandet på hastigheten 8 km/h (”låg” hastighet) för att sedan öka hastigheten till 12 km/h (”hög” hastighet). Tabellen visar exempel på Fias träningspass på löpbandet.

	Tid		Energiförbrukning
	”låg” hastighet	”hög” hastighet	
Träningspass 1	20 min	10 min	300 kcal
Träningspass 2	10 min	15 min	280 kcal

Hur mycket energi per minut (kcal/min) förbrukar Fia då hon springer med ”låg” respektive ”hög” hastighet?

19. Två räta linjer har ekvationerna $y = 3x - 1$ och $y - 3x - 1 = 0$. C

Undersök om linjerna är parallella.

20. Bestäm värdet på konstanten a så att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay = 7 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$$

får en lösning då $x = 3$.

C

21. Smyckegrottan har rea på allt i butiken. Sarah, Wei, Liam och Amanda går dit för att fynda. De upptäcker att alla hårspännen har samma reapris. Alla ringar har också ett fast reapris. Motsvarande gäller också armbanden.

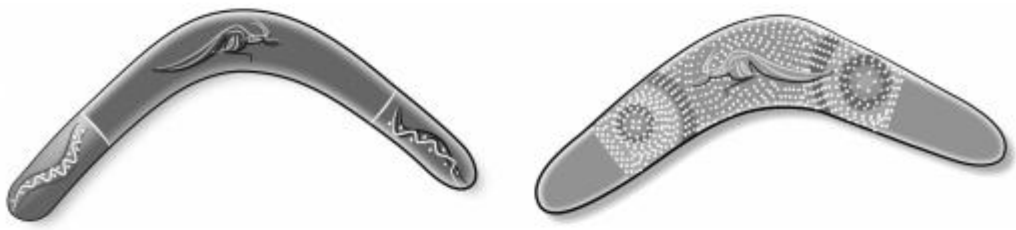
C

Sarah köper tre hårspännen, fyra ringar och sex armband och betalar 192,50 kr. Wei köper åtta hårspännen, sju ringar och två armband och betalar 230 kr. Liam köper fem ringar och betalar 100 kr.

Amanda tänker köpa sju hårspännen, fyra ringar och två armband. Vad ska hon då betala?

22. Företaget Koori tillverkar två olika sorters bumeranger, en traditionell och en exklusiv variant.

C



Bumerangerna ska först snidas för hand och sedan målas. En traditionell bumerang tar tre timmar att snida och en timme att måla. En exklusiv bumerang tar fyra timmar att snida och tre timmar att måla.

Under en vecka tillverkades ett antal bumeranger så att det vid veckans slut endast fanns helt färdiga bumeranger. Då hade snidarna arbetat sammanlagt i 150 timmar och målarna sammanlagt i 100 timmar.

Hur många bumeranger tillverkades under denna vecka?

23. Hanna sitter tillsammans med sina kompisar på ett café i Göteborg. Hon samlar in 324 kronor, vilket motsvarar kostnaden för fyra te och sex caffe latte. När hon gör beställningen och betalar får hon 28 kronor över. Då inser Hanna att hon har förväxlat antalet te med antalet caffe latte när hon gjorde beställningen.

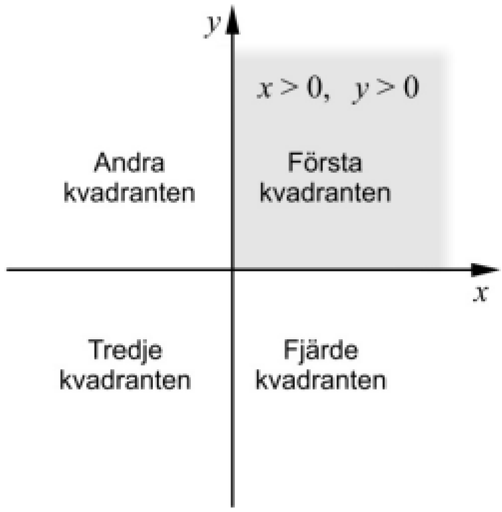
C

Hur mycket kostar en kopp te respektive en caffe latte på caféet?

24. Två linjer $y = 2x + 5$ och $y = kx + m$ skär varandra i en enda punkt. Den punkten ligger på y-axeln. C A

Vilka värden kan riktningskoefficienten k ha? Motivera.

25. De två räta linjerna $y = x - 4$ och $y = ax + 2$, där a är en konstant, skär varandra i första kvadranten. C A



Undersök vilka värden som är möjliga för konstanten a.

26. För en rät linje $y = f(x)$ gäller att $f(3) - f(1) = 6$ och $f(0) = 5$. C A

Bestäm den räta linjens ekvation.

27. Studera ekvationssystemet C A

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = kx + m \end{cases}$$

där k och m är konstanter.

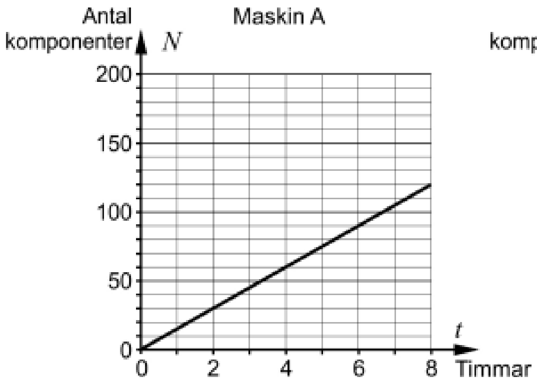
Förklara hur värdet på k och värdet på m påverkar antalet lösningar till ekvationssystemet.

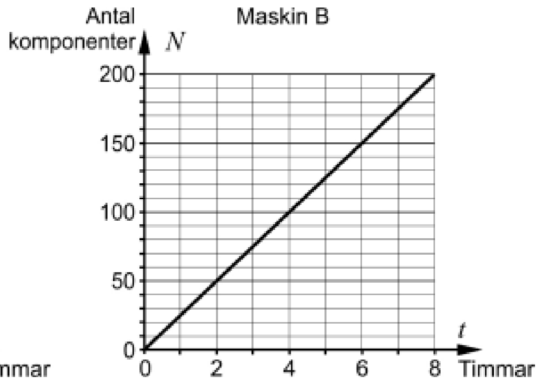
28. En linje L går genom origo i ett koordinatsystem. L skär linjen $y = 2x - 3$ i en punkt vars x-koordinat är större än 50. C A

Vilka ekvationer för linjen L är möjliga?

29. Barbro och Conny har ett litet företag. De har två maskiner som båda tillverkar samma komponent till bilmotorer. Den nyare maskinen är mer miljövänlig men arbetar långsammare och den äldre maskinen är mindre miljövänlig men arbetar snabbare. Varje maskin måste köras av en person. Hur snabbt maskinerna arbetar framgår av graferna.

E C A





a) Hur många komponenter kan de båda maskinerna sammanlagt tillverka som mest under en 8 timmar lång arbetsdag?

b) Teckna sambandet mellan antal tillverkade komponenter N och tiden t i timmar för Maskin A. Teckna motsvarande samband för Maskin B.

Maskin A används så mycket som möjligt eftersom den är mer miljövänlig. Varje arbetsdag är som mest åtta timmar lång.

c) En arbetsdag ska man tillverka 270 komponenter. Både Conny och Barbro har möjlighet att köra maskinerna under dagen. Hur lång tid ska man köra respektive maskin för att det ska bli mest miljövänligt?

d) En annan arbetsdag är det bara Barbro som har möjlighet att arbeta vid maskinerna och därför kan hon bara köra en maskin i taget. Hon ska tillverka 172 komponenter och startar med Maskin A. Efter hur lång tid ska hon gå över till att använda Maskin B?

Vissa dagar måste en av dem vara borta på kundbesök. Barbro och Conny diskuterar hur de då ska planera sitt arbete vid maskinerna och kommer fram till:

- För miljöns skull ska Maskin A användas så mycket som möjligt.
- Av säkerhetsskäl så ska en person bara köra en maskin åt gången.

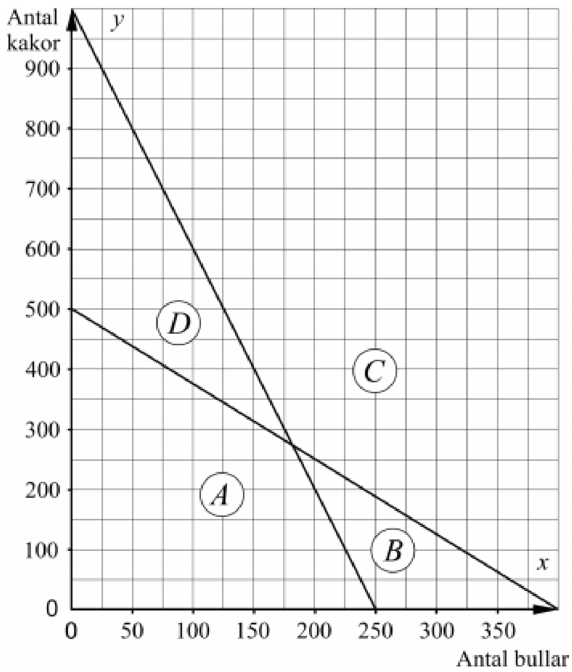
e) Hjälp Barbro och Conny att reda ut hur lång tid varje maskin ska köras under en arbetsdag då bara en av dem kan köra maskinerna, beroende på hur många komponenter som ska tillverkas under dagen.

30. Hjalmar och Agnes har fått i uppdrag att baka bullar och kakor som de ska sälja för att få pengar till en skolresa. De räknar med att sälja allt de bakar. E C A

Bullar (100 st)	**Kakor (100 st)**
2400 gram mjöl	600 gram mjöl
500 gram smör	400 gram smör
425 gram socker	170 gram socker
2,5 paket jäst	4 teskedar bakpulver
1,5 liter mjölk	6 teskedar vaniljsocker
1 tesked salt	
Vinst: 4 kr per bulle	**Vinst: 2 kr per kaka**

De skriver upp de två recepten på ett papper och bestämmer att vinsten ska vara 4 kr per bulle och 2 kr per kaka.

För att veta hur mycket de kan baka kollar Agnes och Hjalmar hur mycket av ingredienserna de har hemma. Agnes har 2000 gram smör och ställer upp ekvationen $5x + 4y = 2000$ och Hjalmar har 6000 gram mjöl och ställer upp ekvationen $4x + y = 1000$ där x är antal bullar och y är antal kakor.



Figur 1

I figuren till höger är linjerna för Agnes och Hjalmars ekvationer uppritade.

a) Förklara vilken linje som motsvarar Agnes ekvation och vilken som motsvarar Hjalmars ekvation.

b) Beskriv vad som gäller för tillgången på mjöl och smör i områdena markerade med A och D i figuren.

Hjalmar: Vinsten blir 400 kr om vi bakar 100 bullar och inga kakor eller om vi bakar 200 kakor och inga bullar.

Agnes: Ja det stämmer, men vi ska väl baka båda sorterna? Det måste finnas många kombinationer av antalet bullar och kakor som ger vinsten 400 kr.

Hjalmar: Dessutom borde vi kunna få en större vinst än 400 kr. Varför inte en vinst på 800 kr eller 1400 kr?

c) Rita av figuren. Bestäm några punkter (x bullar och y kakor) där vinsten är 800 kr respektive 1400 kr och rita in vinstsambanden i figuren.

Agnes: Vi använder mina 2000 gram smör och dina 6000 gram mjöl och köper resterande ingredienser. Kan vi då få en vinst på 1400 kr?

d) Förklara för Agnes hur hon kan besvara frågan utifrån figuren.

Hjalmar: Vilken är den största vinst vi kan få om vi använder mitt mjöl och ditt smör?

e) Rita den linje som svarar mot maximal vinst och motivera valet av denna linje. Besvara sedan Hjalmars fråga.

FACIT

1. a) B. $y = 2x - 1$ (Ma B HT 2009)

   b) B. $y = -2x + 1$ Ma B HT 2011

2. a) $y = 2x - 3$ (Ma B VT 2008)

   b) $y = -2x + 3$ (Ma B HT 2010)

3. a) Godtagbart ritat koordinatsystem med en linje genom punkterna (0, 2) och (4, 0).

   b) $y = -0{,}5x + 2$ (Ma B VT 2011)

4. a) $y = x + 3$ (Ma B HT 2008)

   b) $y = 1{,}25x + 3{,}5$ (Ma B VT 2010)

   c) $y = -4x + 34$ (Ma B VT 2012)

5. a) Godtagbart ritad linje

   b) $y = -2x + 7$ (Ma B VT 2009)

6. Nej, linjerna är inte parallella, $k_1 = \frac{8}{9}$ och $k_2 = \frac{10}{11}$ (Ma B VT 2012)

7. a) A och F

   b) $y = -2x + 4$ (Ma B HT 2012)

8. a) $x = 28 \quad y = -14$ (Ma B VT 2011)

   b) $x = 2 \quad y = 6$ (Ma B HT 2009)

   c) $x = -4 \quad y = 9$ (Ma B VT 2008)

   d) $x = 4, y = 2$ (Ma B HT 2010)

   e) $x = -8, y = 3$ (Ma B HT 2011)

   f) $x = -2, y = 5$ (Ma B VT 2012)

9. Vesuvio: 75 kr, Margherita: 65 kr (Ma B HT 2010)

10. Skrovmål 59 kr och barnmeny 32 kr. (Ma B HT 2008)

11. Nej, den ligger inte på linjen. (Ma B VT 2011)

12. a) $x = 12, y = 15$

    b) 1 kg äpplen och 2 kg apelsiner kostar totalt 42 kr (Ma B VT 2010)

13. a) $a = 5{,}60 \quad b = 247$

    b) a är slangens pris per meter och b är priset på vagnen. (Ma B HT 2009)

14. 206 liter (Ma B VT 2009)

15. a) 200

    b) Den minskar lika mycket hela tiden

    c) $y = -x + 220$ (Ma B VT 2010)

16. T.ex. (1, –2) (Ma B HT 2009)

17. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ och t.ex. $x + y = 9$ (Ma B HT 2012)

18. 8,5 kcal/min respektive 13 kcal/min. (Ma B VT 2011)

19. Ja, linjerna är parallella eftersom lutningen är lika för båda linjerna. (Ma B HT 2010)

20. $a = 2$ (Ma B VT 2009)

21. 162,50 kr (Ma B HT 2009)

22. Det tillverkades 40 bumeranger under veckan (Ma B VT 2012)

23. Te kostar 24 kr och caffe latte kostar 38 kr (Ma B HT 2012)

24. k får inte vara 2. (Ma B VT 2011)

25. $-0{,}5 < a < 1$ (Ma B HT 2012)

26. $y = 3x + 5$ (Ma B HT 2008)

27. När $k \neq 2$ finns en entydig lösning oavsett värde på m
    När $k = 2$ och $m \neq 3$ saknas lösning
    När $k = 2$ och $m = 3$ finns det ett oändligt antal lösningar (Ma B HT 2008)

28. $m = 0$; $k > 1{,}94$ (Ma B VT 2008)

29.

a) Ur diagrammet utläser jag att maskin a producerar 120 komponenter på 8 timmar och maskin b producerar 200. Så på 8 timmar producerar de tillsammans 120+200 dvs 320 komponenter.

b) $f(A) = KA + m$ ur diagrammet utläses att $m = 0$

$f(A) = KA$

$f(8) = k \cdot 8 = 120 \Leftrightarrow k = \frac{120}{8} = 15$

$f(A) = 15A$ där A är tiden i timmar

$g(B) = KB + m$ precis som i A är $m = 0$

$g(B) = KB$

$g(8) = 200 = k \cdot 8 \Leftrightarrow k = \frac{200}{8} = 25$

$g(B) = 25B$

c) Eftersom maskin A är mer miljövänlig bör man köra den så mycket som möjligt dvs 8 timmar

$(f(8) + g(B)) - 270 = 0$

$120 + 25B = 270 \Leftrightarrow 25B = 150$

$\Leftrightarrow B = \frac{150}{25} = 6$ timmar

D) $A + B = 8 \Leftrightarrow A = 8 - B$

$f(A) + g(B) = 172 = f(8-B) + g(B) = 15(8-B) + 25B =$

$120 - 15B + 25B = 172 = 120 + 10B$

$10B = 172 - 120 = 52$

$B = \frac{52}{10} = 5.2$

$A + 5.2 = 8 \Leftrightarrow A = 2.8$

Hon kör maskin A i 2,8 timmar och maskin b i 5.2 timmar

X är det som ska produceras på en dag

8 är en arbetsdag

120 är så mycket som A kan producera på (

Om bara en person kör maskinerna

och $x < 120$ så kör man A i $\frac{x}{15}$ timmar

Om $x > 120$ och 1 person kör gäller sa princip som i fråga D, fast denna går generell form

$x = 120 + 10B$

man kör då B i $\frac{x-120}{10}$ timmar

och A i $8 - \frac{x-120}{10}$ timmar

Har man 120 eller färre komponenter att tillverka används bara Maskin A. Mellan 120 och 200 komponenter så behövs båda maskinerna (Ma B HT 2011)

30. T.ex.: (Ma B VT 2008) Eleven tolkar egenskaperna hos de båda områdena A och D korrekt. Eleven resonerar om att alla vinstlinjer är parallella och den maximala vinsten erhålls för den punkt där vinstlinjen skär A:s yttersta hörn. Elevens matematiska resonemang och matematiska språket är i huvudsak korrekt. Totalt sett uppfyller eleven tre MVG-kvaliteter.

•1 Enkelt att kolla (på linjerna) är vars de skär y-axeln.

Agnes $5x + 4y = 2000$ Alltså är Agnes linje nr 2

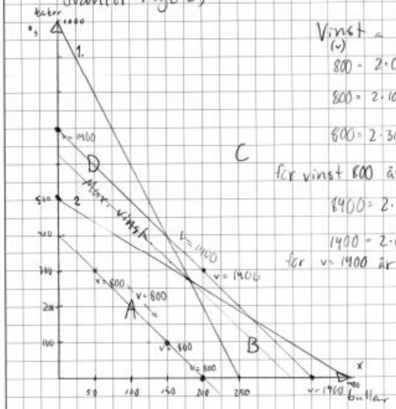
$5 \cdot 0 + 4y = 2000$ och där för är Hjalmars

$y = 500$ linje linje 1.

•2 I område A räcker både mjöl och smör.

I område D har smöret tagit slut (området är ovanför linje 2)

•3



Vinst (v) $= 2y + 4x$

$800 = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 200$

$800 = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 150$

$800 = 2 \cdot 300 + 4 \cdot 50$

för vinst 800 är $y = -2x + 400$

$1400 = 2 \cdot 700 + 4 \cdot 0$

$1400 = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 350$

för $v = 1400$ är $y = -2x + 700$

•4 Genom att avläsa i figuren ser vi att linjen $y = -2x + 700$ (dvs vinst 1400 kr) inte skär område A. Alltså går det inte

•5 Tendensen visar tydligt att alla vinst linjer är parallella och har formeln $y = -2x + 0.5 \cdot v$. Den maximala vinsten är därför den vars linje skär område A:s yttersta hörn.

G

dvs där linjerna $y = -1{,}25x + 500$ och $y = -4x + 1000$ skär varandra. Dvs:

$-1{,}25x + 500 = -4x + 1000$ $y = -4 \cdot 181{,}8 + 1000$

$2{,}75x = 500$

$x = \frac{500}{2{,}75} \approx 181{,}8$ $y \approx 272{,}7$

Men eftersom ingen vill ha 0,8 bullar bakar vi bara 181 st och kan då baka 273 kakor

Det ger vinsten $4 \cdot 181 + 2 \cdot 273 = \underline{\underline{1270 \text{ kr}}}$

Svar: Den maximala vinsten är 1270 kr.

Algebra och ickelinjära modeller

Polynom, andragradsekvationer och -funktioner

1. Förenkla uttrycken så långt som möjligt E

a) $3a \cdot 3a + 3a + 3a$ b) $(3a)^2 - 3a^2$

c) $(x + 4)^2 - 8x$ d) $x(x + 3) - 2x(3 + 4x)$

e) $9 - (x - 3)(x + 3)$ f) $(x - 3)^2 - (x - 3)$

g) $(x - 2)^2 + (3 - x)(x - 4)$ h) $(x + 3)(x - 3) + (x + 2)^2$

2. Lös ekvationerna E

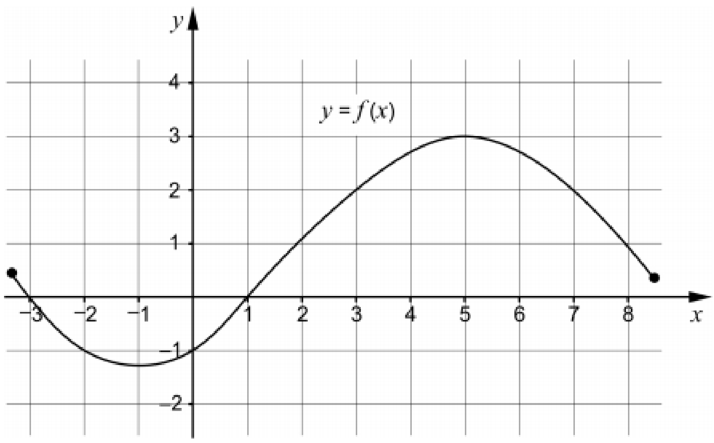
a) $3x^2 - 27 = 0$ b) $x^2 + 4x = 0$ c) $x^2 - 4x - 32 = 0$

d) $x^2 + 10x - 24 = 0$ e) $x^2 - 6x - 16 = 0$ f) $x^2 - 4x + 3 = 0$

3. Låt $f(x) = x^2 + 5x$ E

Beräkna $f(4) - f(2)$

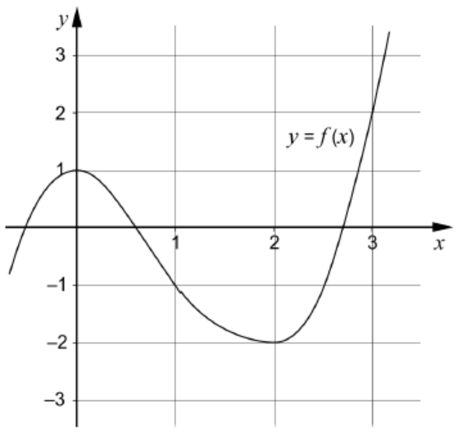
4. Figuren visar grafen till funktionen $y = f(x)$ E



a) Bestäm $f(0)$

b) För vilket x är $f(x) = 3$?

5. Figuren visar grafen till funktionen $y = f(x)$ E



a) Bestäm $f(1)$

b) För vilket x är $f(x) = 2$?

6. En andragradskurva skär x-axeln då $x = 2$. Den har en maximipunkt då $x = 5$. E

För vilket ytterligare värde på x skär kurvan x-axeln?

7. För en andragradsfunktion gäller: E

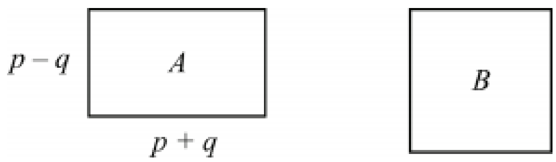
- Funktionen har ett nollställe för $x = 4$
- Funktionen har sitt största värde för $x = 1$

För vilket värde på x har funktionen sitt andra nollställe?

8. En andragradskurva med minimipunkten $(4, 2)$ skär y-axeln i punkten $(0, 5)$. E

Ange ytterligare en punkt på kurvan.

9. Rektangeln A och kvadraten B har lika stor omkrets. Rektangeln A har sidor med längden $p + q$ och $p - q$. E C



a) Teckna och förenkla ett uttryck för rektangeln A:s area.

b) Bestäm ett förenklat uttryck för kvadraten B:s area.

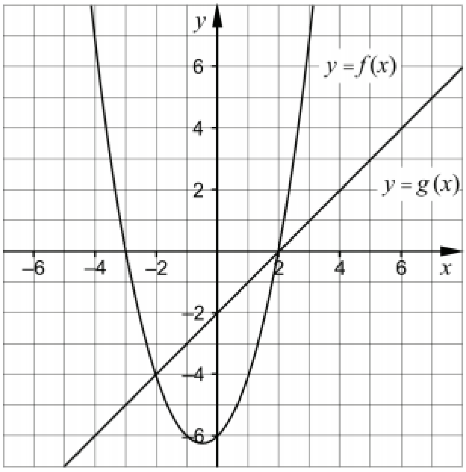
10. Lukas kastar en sten snett upp i luften från en bro. Stenens höjd y meter över vattnet ges av sambandet $y = 15 + 10t - 5t^2$ där t är tiden i sekunder efter det att stenen kastats. E C

a) Hur högt över vattenytan är stenen när den lämnar Lukas hand

b) Efter hur lång tid träffar stenen vattenytan?

c) Bestäm stenens högsta höjd över vattenytan.

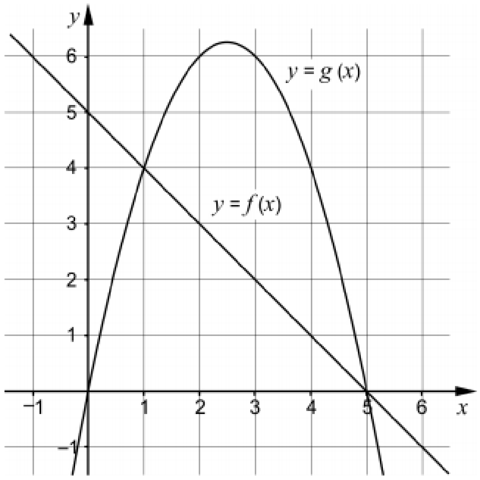
11. I figuren nedan återges graferna till funktionerna $y = f(x)$ och $y = g(x)$. E C



a) Bestäm $f(3) - g(3)$.

b) För vilka värden på x är $f(x) < g(x)$?

12. Figuren visar graferna till funktionerna f och g. E C



a) Bestäm $g(3) - f(3)$

b) För vilka värden på x gäller att $f(x) < g(x)$?

13. Ozonskiktet uppe i stratosfären skyddar oss från UV-strålning. Ozonlagrets tjocklek mäts i enheten Dobson Unit (DU). När meteorologer talar om ozonhål över bland annat Antarktis menar de egentligen områden som har en ozon-tjocklek som är mindre än 220 DU. Det är alltså inte frågan om ett hål utan snarare om ett tunnare ozonlager. E C

Sedan 1980-talet mäter SMHI ozonlagrets tjocklek på olika platser i Sverige, bland annat över Norrköping. En funktion som bygger på dessa mätningar från 1 juni till 31 december år 2008 ges av:

$$f(x) = 0{,}0052x^2 - 1{,}4x + 378, \quad 0 \leq x \leq 210$$

där $f(x)$ är ozonlagrets tjocklek i enheten DU och x är antal dagar efter 1 juni.

a) Bestäm $f(0)$ och beskriv hur $f(0)$ ska tolkas i detta sammanhang.

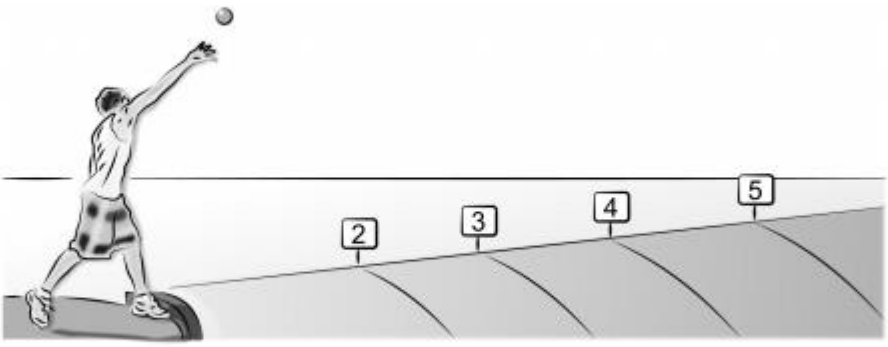
b) Antar funktionen ovan värden som är mindre än 220 DU? Motivera ditt svar.

14. Vid kulstötning kan en kulas bana beskrivas med en enkel matematisk modell. Kulans bana mättes vid ett tillfälle och kunde beskrivas med funktionen E C

$$y = -0{,}07x^2 + 0{,}8x + 2$$

y är kulans höjd över marken i meter.
x är avståndet i meter längs marken från kanten på kulringen.

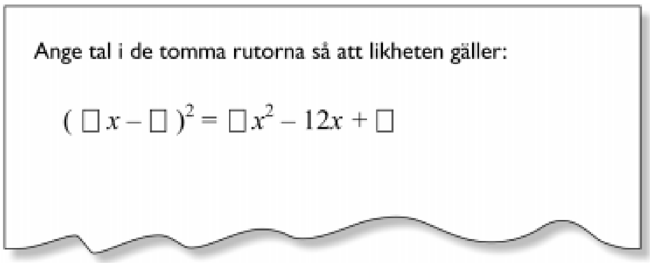
Längs marken finns markeringar för olika avstånd. Kulan var nära sin högsta höjd då den passerade markeringen för 6 meter.



a) Vilken var kulans höjd då den passerade markeringen för 6 meter?

b) Hur lång blev kulstöten, det vill säga hur långt från kulringens kant slog kulan ned?

15. Cecilia ska lösa följande uppgift i sin matematikbok: C


Ange tal i de tomma rutorna så att likheten gäller:

$$(\square x - \square)^2 = \square x^2 - 12x + \square$$

Ge ett exempel på vad Cecilia kan skriva i rutorna så att likheten gäller.

16. För den linjära funktionen f med riktningskoefficienten k gäller följande: C

- $k > 0$
- grafen till f går genom punkten $(1, 5)$

Kan grafen till f också gå genom punkten $(3, 3)$? Motivera ditt svar.

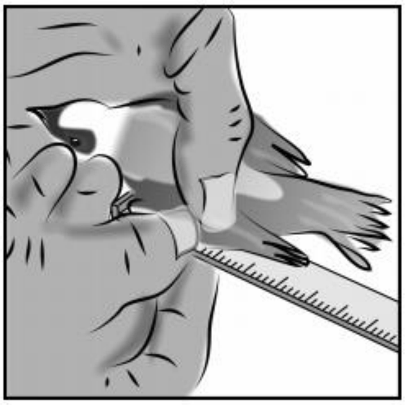
17. Uttrycket $(x - 5)(x + 7)$ får värdet 28 då $x = 7$. Uttryckets värde blir 28 även för ett annat värde på x. C

Bestäm detta x-värde.

18. För funktionen f gäller att $f(x) = x^2$. C

Finns det något eller några tal a sådana att $f(a) = a$? Bestäm i så fall alla dessa tal.

19. I samband med ringmärkning av fåglar bestäms ofta fågelns vikt och ett vingmått. En biolog vid sjön Tåkern i Östergötland ringmärker pungmesar. Hennes mätdata leder fram till följande modell: C



$$y = -0{,}0060x^2 + 0{,}36x + 6{,}0$$

där vikten, y gram, beror av vingmåttet, x mm. Hon observerar att en unge med vingmåttet 10 mm har samma vikt som en fullvuxen fågel.

Hur stort vingmått bör en fullvuxen pungmes ha enligt modellen?

20. I en lärobok i matematik står det: C A

Om differensen mellan två tal är 1 så är differensen mellan det större talets kvadrat och det mindre talets kvadrat alltid lika stor som talens summa.

Visa att detta gäller för alla sådana tal.

21. En grupp personer hälsar på varandra genom att skaka hand. Antalet handskakningar H i gruppen ges då av C A

$$H = \frac{n(n-1)}{2}$$

där n är antalet personer.

Antag att en grupp A består av ett antal personer och en grupp B består av dubbelt så många personer som grupp A. Personerna i grupp A hälsar på varandra och personerna i grupp B hälsar på varandra.

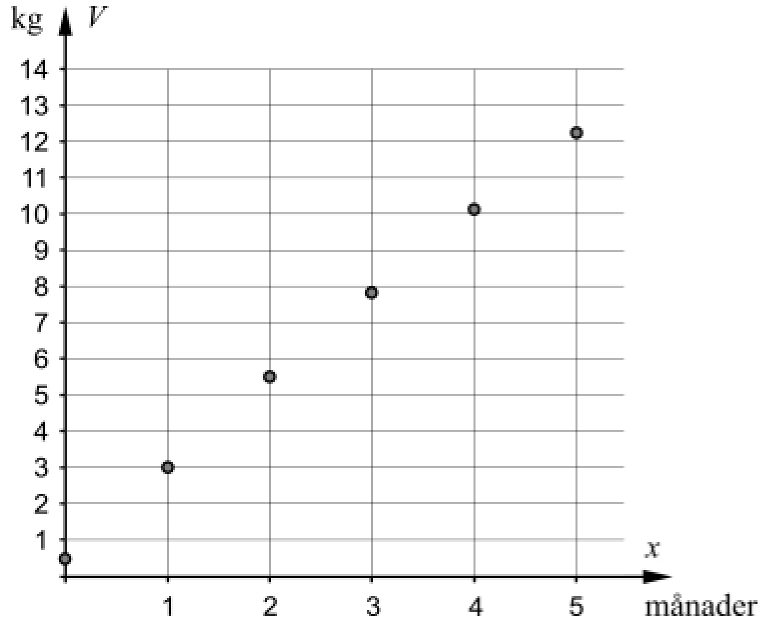
Teckna ett uttryck för differensen mellan antalet handskakningar i de två grupperna. Förenkla sedan detta uttryck så långt som möjligt.

22. För talen x och y gäller sambandet $x^2 + 2xy + y^2 = 9$ C A

Visa att samtliga lösningar till sambandet kan beskrivas av två räta linjer i ett koordinatsystem.

23. Nils och Hilma har köpt en dvärggris att ha som sällskapsdjur. Enligt uppfödaren är grisen fullvuxen efter ungefär två år. Då ska den väga cirka 35 kg. Grisen har vägts en gång varje månad sedan födseln. Resultatet visas i diagrammet.

C A



Nils tycker det ser ut som om grisens vikt ökar ungefär lika mycket varje månad. Han tänker sig en modell där vikten ökar lika mycket varje månad tills grisen är fullvuxen.

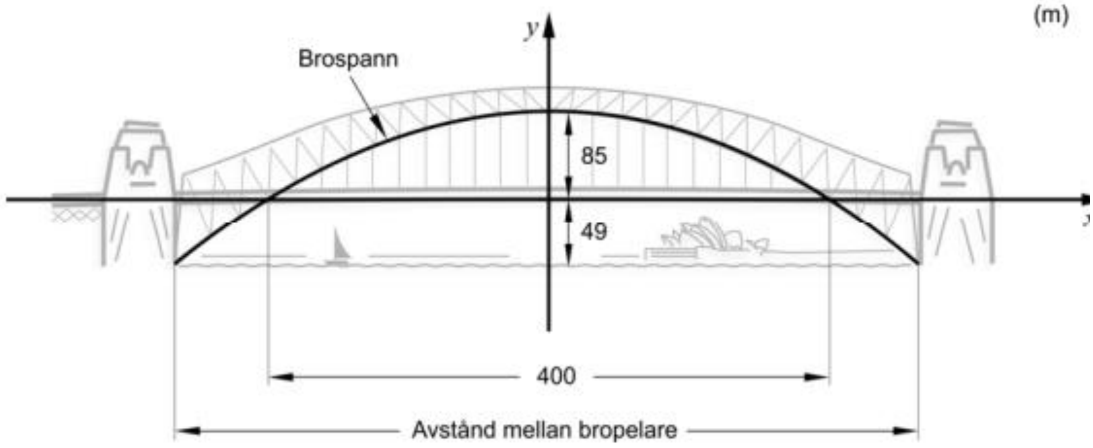
a) Bestäm utifrån diagrammet en funktion som visar sambandet mellan grisens vikt och ålder enligt Nils modell.

Hilma har hittat en modell på internet som visar dvärggrisars vikt från födsel till fullvuxen gris: $V(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}60x + 0{,}50$, där V är vikten i kg och x är grisens ålder i månader.

b) Nils och Hilma har nu två olika modeller för grisens vikt. Undersök hur väl modellerna stämmer med uppfödarens uppgifter och grisens vikter från diagrammet. Är någon modell bättre än den andra? Motivera ditt svar.

24. En av sevärdheterna i Sydney är den stora stålbron, Sydney Harbour Bridge. Mellan bropelarna löper ett brospann som har formen av en andragradskurva. Den högsta punkten är belägen 85 meter över vägbanan. Vägbanan ligger i sin tur 49 meter över vattenytan. Brospannet befinner sig ovanför vägbanan längs en 400 meter lång vägsträcka. Se figur.

E C A



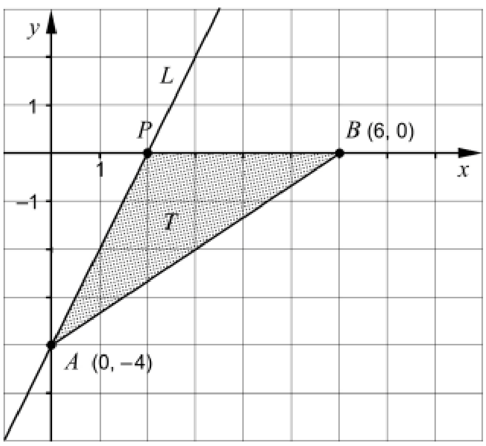
Ekvationen för andragradskurvan som beskriver brospannet kan skrivas som $y = ax^2 + b$, där a och b är konstanter.

a) Vilket värde har konstanten b för den andragradskurva som beskriver brospannet?

b) Hur långt är avståndet mellan bropelarna?

25. Triangeln i koordinatsystemet nedan har sina hörn i punkterna A, B och P. Punkten P är rörlig längs x-axeln och dess x-koordinat ligger i intervallet $0 < x < 6$. Linjen L går genom punkterna A och P. Din uppgift är att undersöka hur triangelns area T beror av riktningskoefficienten k för linjen L.

E C A

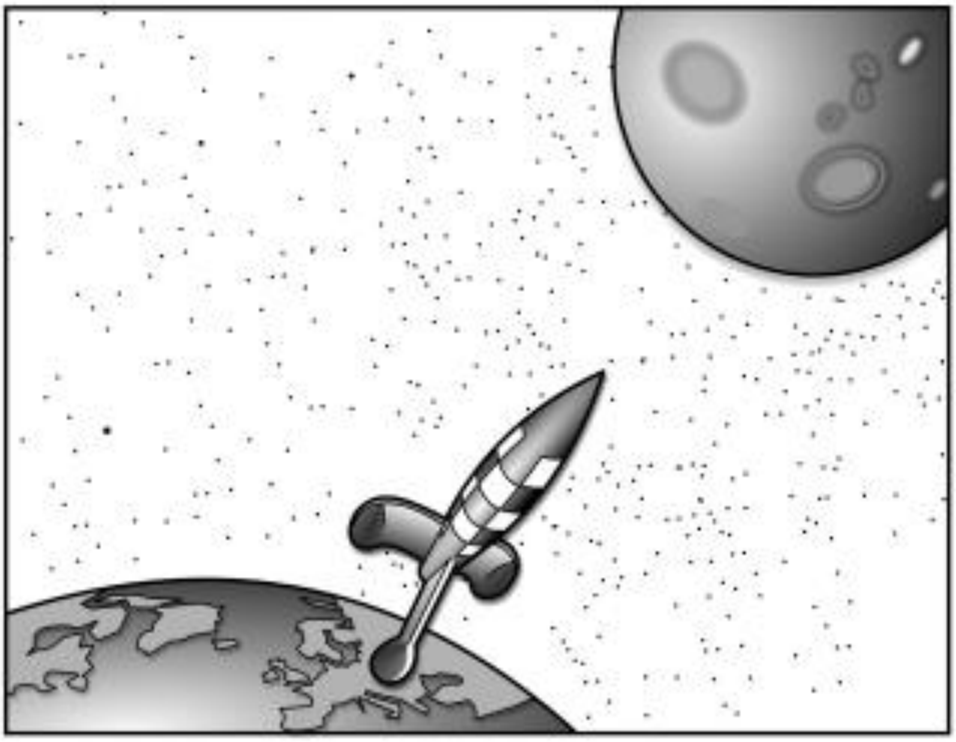


a) Bestäm T och k då P har koordinaterna $(2, 0)$.

b) När P rör sig längs x-axeln ändras triangelns area och linjens riktnings-koefficient Undersök och beskriv så noggrant som möjligt hur triangelns area T varierar för olika värden på linjens riktningskoefficient k.

26. Hugo och Ilona ska göra en datorsimulering av en raket som ska landa på månen. De har var sin modell för att beskriva raketens rörelse mot månens yta från det att raketen påbörjar sin landning till dess den har landat på månen.

E C A



Hugo använder modellen $h(t) = \frac{t^2}{90} - \frac{20t}{3} + 1000$ där h är höjden i meter över månens yta och t är tiden i sekunder från det att raketen påbörjar sin landning.

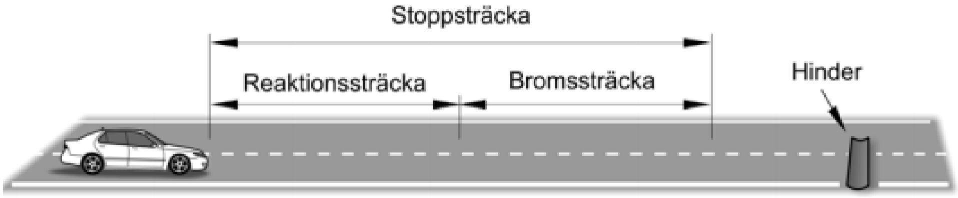
a) På vilken höjd över månen påbörjar raketen sin landning enligt Hugos modell?

b) Beräkna $h(300)$ och tolka resultatet.

Ilona använder modellen $g(t) = 1000 - \frac{10t}{3}$ där g är höjden i meter över månens yta och t är tiden i sekunder från det att raketen påbörjar sin landning.

c) Jämför och beskriv likheter och skillnader mellan de båda modellerna för hur raketen rör sig mot månens yta.

27. I samband med bilkörning brukar man tala om stoppsträcka i situationer då föraren upptäcker ett hinder, bromsar in och stannar. Stoppsträckan s kan delas in i två delar. Den första delen, reaktionssträckan, är den sträcka bilen rör sig från det att föraren ser ett hinder till dess att föraren reagerar och trycker på bromspedalen. Den andra delen, bromssträckan, är den sträcka som bilen rör sig från det att föraren börjar bromsa till det att bilen stannar. Se figur. E C A



Stoppsträckan s vid ett visst väglag kan beräknas enligt följande formel:

$$s = \underbrace{0{,}27v}_{\text{Reaktionssträcka}} + \underbrace{0{,}005v^2}_{\text{Bromssträcka}}$$

där stoppsträckan s anges i meter och hastigheten v anges i km/h.

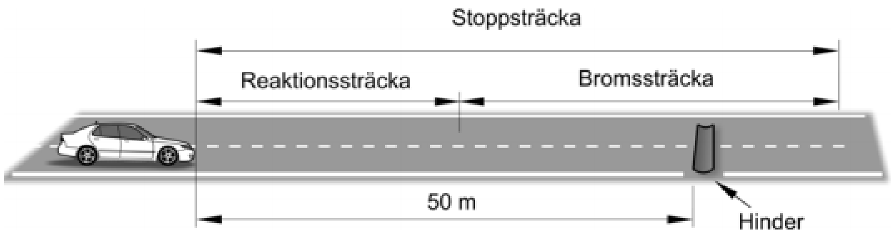
a) Beräkna reaktionssträcka, bromssträcka och stoppsträcka för hastigheterna 70 km/h, 90 km/h och 110 km/h. Rita av tabellen och fyll i dina värden.

Hastighet (km/h)	Reaktionssträcka (m)	Bromssträcka (m)	Stoppsträcka (m)
70			
90			
110			

Vid landsvägskörning i mörker lyser halvljusen upp vägen cirka 50 meter framför bilen. Det är vid det avståndet föraren tidigast kan upptäcka ett hinder.

b) Undersök för vilka hastigheter det är möjligt att kunna stanna på 50 meter.

Enligt formeln för stoppsträckan $s = 0{,}27v + 0{,}005v^2$ hinner föraren inte stanna före ett hinder som upptäcks då avståndet till hindret är 50 meter och föraren kör med hastigheten 110 km/h. Tänk dig att bilen kan passera hindret och att föraren fortsätter att bromsa. Se figur.



c) Hur långt efter hindret stannar bilen om hastigheten är 110 km/h då föraren upptäcker hindret?

d) Vilken hastighet har bilen när den är vid hindret om hastigheten är 110 km/h då föraren upptäcker hindret?

Den hastighet som bilen har vid hindret beror av den ursprungliga hastigheten då föraren upptäcker hindret och avståndet fram till hindret. Tänk dig nu att bilens ursprungliga hastighet är v km/h då föraren upptäcker ett hinder på 50 meters avstånd och att bilens hastighet vid hindret är u km/h.

e) Undersök och beskriv sambandet mellan u och v.

FACIT

1. a) $9a^2 + 6a$ (Ma B HT 2011)
   b) $6a^2$ (Ma B HT 2010)
   c) $x^2 + 16$ (Ma B HT 2008)
   d) $-3x - 7x^2$ (Ma B HT 2008)
   e) $18 - x^2$ (Ma B HT 2009)
   f) $x^2 - 7x + 12$ (Ma B VT 2009)
   g) $3x - 8$ (Ma B VT 2011)
   h) $2x^2 + 4x - 5$ (Ma B VT 2008)

2. a) $x_1 = -3 \quad x_2 = 3$ (Ma B HT 2007)
   b) $x_1 = 0 \quad x_2 = -4$ (Ma B VT 2011)
   c) $x_1 = -4 \quad x_2 = 8$ (Ma B HT 2009)
   d) $x_1 = 2 \quad x_2 = -12$ (Ma B VT 2009)
   e) $x_1 = 8 \quad x_2 = -2$ (Ma B VT 2011)
   f) $x_1 = 1 \quad x_2 = 3$ (Ma B HT 2008)

3. 22 (Ma B VT 2010)

4. a) -1
   b) $x = 5$ (Ma B HT 2011)

5. a) -1
   b) $x = 3$ (Ma B HT 2010)

6. $x = 8$ (Ma B HT 2008)

7. $x = -2$ (Ma B VT 2012)

8. T.ex. (8, 5) (Ma B VT 2009)

9. a) $p^2 - q^2$
   b) p^2 (Ma B HT 2008)

10. a) 15 m
    b) 3 s
    c) 20 m (Ma B HT 2008)

11. a) 6
    b) $-2 < x < 2$ (Ma B VT 2008)

12. a) 4
    b) För alla x mellan 1 och 5 (Ma B VT 2012)

13. a) 378, Ozonlagrets tjocklek 1:a juni
    b) Nej, det blir minus under rottecknet (Ma B VT 2010)

14. a) 4,3 m
    b) 13,5 m (Ma B HT 2011)

15. T.ex. $(x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$ (Ma B VT 2012)

16. ”Nej, om x ökar måste också y öka eftersom $k > 0$. Funktionen kan inte gå genom punkten (3, 3)” (Ma B HT 2011)

17. $x = -9$ (Ma B VT 2010)

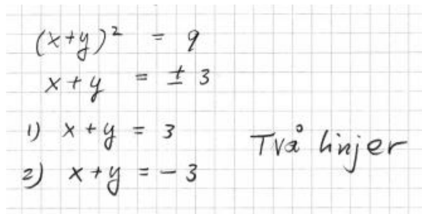
18. $a_1 = 0 \quad a_2 = 1$ (Ma B HT 2009)

19. 50 mm (Ma B VT 2008)

20. $(x + 1)^2 - x^2 = x + 1 + x$ (Ma B HT 2008)

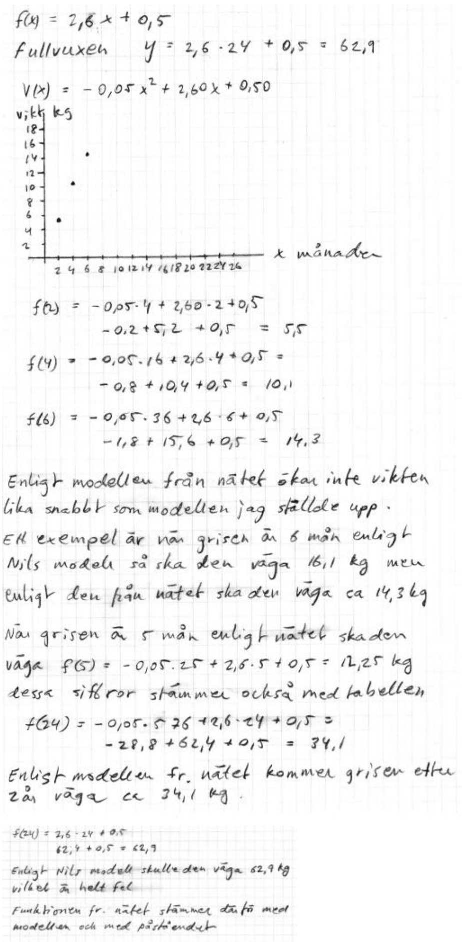
21. $\frac{3n^2 - n}{2}$ (Ma C HT 2009)

22. Ex:



(Ma B VT 2009)

23. Ex:

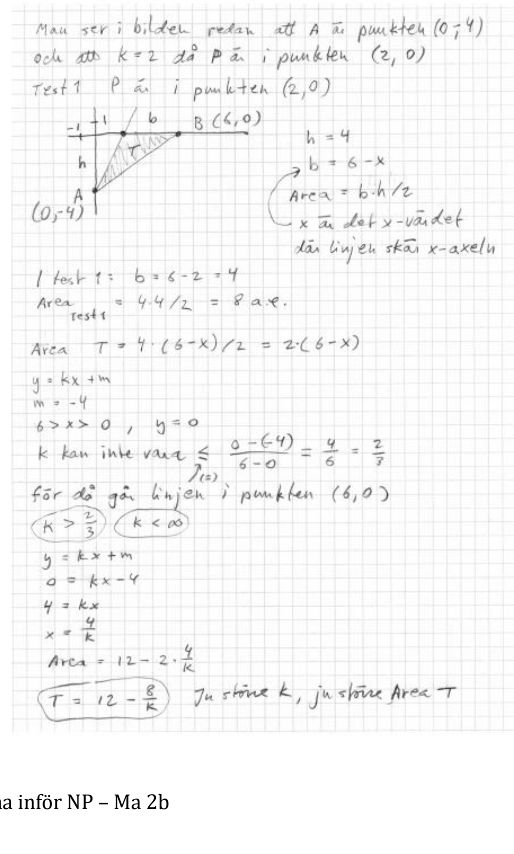


(Ma B HT 2009)

24. a) 85

b) 500 – 520 m (Ma B VT 2011)

25. Ex:



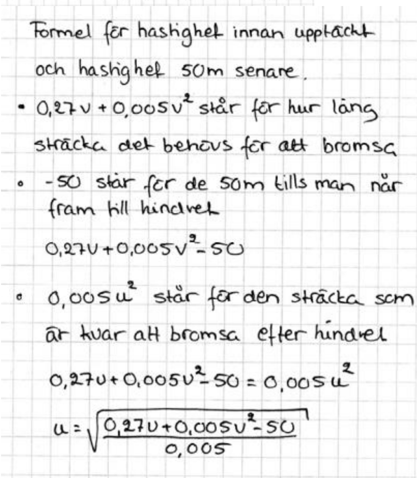
(Ma B VT 2009)

26. a) 1 000 m

b) $h(300) = 0$ Efter 300 s är raketen nere.

c) i båda modellerna påbörjas landningen på samma höjd och tar lika lång tid
$g(t)$ säger att höjden minskar lika mycket hela tiden och $h(t)$ säger att det går fortare i början och långsammare i slutet
”I båda modellerna startar landningen på samma höjd och tar lika lång tid. I den ena modellen så minskar höjden lika mycket hela tiden och i den andra går det fortare i början och långsammare på slutet.” (Ma B VT 2012)

27. Ex:



(Ma B VT 2011)

Potensekvationer, exponentialfunktioner och logaritmer

1. Lös ekvationerna och svara exakt E

a) $x^7 = 14$ b) $7^x = 14$ c) $6x^5 = 24$

d) $10^x = 6$ e) $x^3 = 10$ f) $lg\, x = 0{,}6$

2. Vilket av alternativen nedan är en lösning till ekvationen $10^x = 5$? E

A) $x = \frac{lg\, 10}{lg\, 5}$ B) $x = lg\, 0{,}5$ C) $x = lg\, 2$ D) $x = lg\, 5$ E) $x = \frac{lg\, 5}{10}$

3. Beräkna E

a) $lg\, 10000 - lg\, 100$ b) $10^{lg\, 3} + 10^3$

4. Vilket av följande tal är det bästa närmevärdet till lg 80? E

A) 0,8 B) 0,9 C) 1,9 D) 2,9 E) 8,0 F) 800

5. Ett radhus i Umeå köptes år 2001 för 1,23 miljoner kronor. Sju år senare såldes radhuset för 2,49 miljoner kronor. Antag att prisökningen har varit exponentiell. E

Beräkna den årliga procentuella prisökningen.

6. Petra funderar på att ta ett sms-lån på 2000 kr. Den totala lånekostnaden (ränta, avgifter med mera) för den första månaden är 25 % av lånebeloppet. Petra antar att skulden ökar med samma procentsats varje månad och ställer upp sambandet: $S = 2000 \cdot 1{,}25^x$ där S är skulden i kronor efter x månader. E

Bestäm hur många månader det skulle ta innan Petras skuld blir större än 1 miljon kronor.

7. För barn mellan 5 år och 13 år finns en modell som ger sambandet mellan barnets vikt y kg och längd x m. Enligt denna modell är $y = 2{,}4 \cdot 10^{0{,}8x}$ E

Använd modellen och besvara följande frågor.

a) Hur mycket väger ett barn som är 1,2 m?

b) Vilken längd har ett barn som väger 32 kg?

8. Antalet skickade MMS (bildmeddelanden via mobiltelefoni) har ökat i Sverige. Ökningen antas vara exponentiell. E C

2003 skickades 6,7 miljoner MMS.

Tre år senare, år 2006, skickades 70,3 miljoner MMS.

(Källa: Post- och Telestyrelsen)

Beräkna den årliga procentuella ökningen av antalet skickade MMS.

9. På en skola undersökte en grupp elever hur snabbt kattgräs växer. De sådde gräsfrö i en kruka och när gräset började gro mätte de grässtrånas höjd en gång per dygn. Tabellen visar resultatet av deras försök. E C

Tid (dygn)	Höjd (cm)
0	0,5
1	0,8
2	1,3
3	2,1
4	3,3
5	5,2
6	8,1
7	13,4

Eleverna kom fram till att förloppet kan beskrivas med en matematisk modell som ges av funktionen $y = 0{,}5 \cdot 1{,}6^x$ där y är gräsets höjd i cm och x är tiden i dygn.

a) Vad betyder talen 0,5 och 1,6 i funktionen?

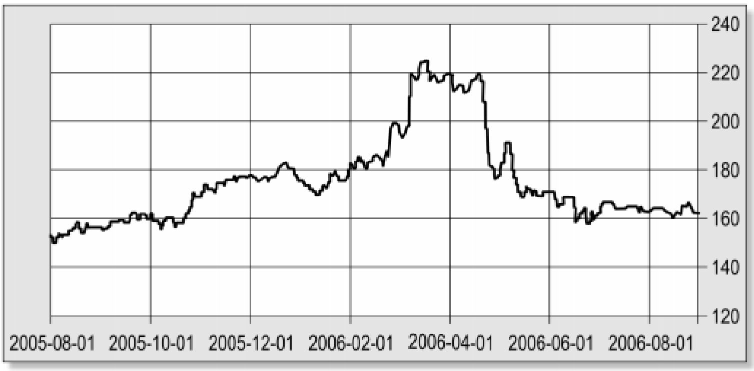
b) Beskriv och visa hur du skulle göra för att komma fram till talet 1,6 med utgångspunkt från data i tabellen ovan.

10. En bakpotatis sätts in i en ugn. Ugnen har värmts upp till 200 °C. Potatisens temperatur T °C stiger enligt funktionen $T(t) = 200 - 179 \cdot 0{,}990^t$ där t är tiden i minuter från det att potatisen sätts in i ugnen. Potatisen kan anses vara färdig då dess temperatur är 100 °C. E C

a) Vilken temperatur har potatisen då den sätts in i ugnen?

b) Hur lång tid tar det för potatisen att bli färdig?

11. Bilden visar kursutvecklingen (i kr) för en Beijeraktie under ett år. (Källa: OMX) C



Antag att den procentuella minskningen har varit lika stor varje månad.

Beräkna aktiens procentuella värdeminskning per månad under perioden l april 2006 till l augusti 2006.

12. Chihuahuan är världens minsta hundras. Under de senaste åren har rasen blivit allt populärare. År 2000 registrerades 306 hundar av rasen i Sverige och år 2010 registrerades 2372 hundar av rasen i Sverige. Källa: Svenska Kennelklubben, (2011), Hundsport, Årgång 2011 (1–2), s. 20 C

Antag att ökningen varit exponentiell. Med hur många procent per år har antalet registrerade hundar av rasen Chihuahua ökat?

13. Bakterien Clostridium perfringens kan orsaka allvarlig matförgiftning. Om mat som innehåller denna bakterie får svalna i rumstemperatur ökar antalet bakterier med 5,9 % per minut. Därför bör man alltid snabbt kyla ner maten efter tillagning. Det krävs ungefär 100 000 bakterier per gram mat för att en person ska bli matförgiftad. (Källa: Smittskyddsinstitutet). C

I en bit kokt lax finns efter tillagning 100 bakterier per gram. Den kokta laxen får svalna i rumstemperatur.

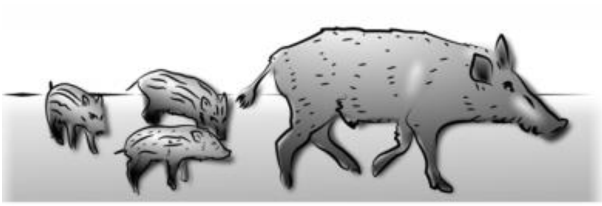
Hur lång tid tar det innan det finns så många bakterier per gram i laxen att en person som äter av den blir matförgiftad?

14. Antalet vildsvin i Sverige ökar kraftigt. Från en rapport är följande citat hämtat: C

> År 2007 beräknades antalet vildsvin uppgå till cirka 60 000 från Skåne och upp till Dalälven som ännu så länge utgör den nordliga gränsen för utbredningen.
> ---
> Från 1990 till 2007 har vildsvinspopulationen haft en så stark tillväxt att antalet vildsvin i Sverige fördubblats vart femte-sjätte år.

Källa: Svensk Naturförvaltning AB (2008), Rapport 04, Vildsvin, jakt och förvaltning

Anta att antalet vildsvin uppskattas vid samma tidpunkt varje år. Utifrån citatet kan man göra olika prognoser om antalet vildsvin i Sverige i framtiden. Hur många vildsvin kan det finnas som mest i Sverige när man uppskattar antalet år 2011 om tillväxten fortsätter i den takt som beskrivs ovan?



15. Bertil sätter in B kr på ett konto som har en årlig räntesats av r %. Räntesatsen är oförändrad under den tid som pengarna finns på kontot. Kapitalet på kontot är K kr. C

Teckna ett funktionsuttryck som anger hur kapitalet K beror av B och r om pengarna finns på kontot i tre år.

16. Figuren visar ryska dockor, så kallade "matrjósjka". Dockorna tillverkas av trä och går att placera inuti varandra.

C A

Den största ryska docka som tillverkats är 100 cm hög. Antag att den näst största dockan är 5 % kortare än den största dockan och att den procentuella minskningen är densamma genom hela dockserien.

Hur många dockor ingår i dockserien om den minsta dockan är 2,6 cm hög?

17. I Sverige är jordbävningar vanligare än vad man kan tro, men oftast är de så svaga att de knappt märks. Med hjälp av Richterskalan kan styrkan i en jordbävning anges med magnituden M. Magnituden M ges av sambandet

E C A

$$M = \frac{2}{3}(lg\, E - 4{,}84)$$

där E är den frigjorda energin mätt i enheten joule, J.

a) Den 16 december 2008 skakades Skåne av en jordbävning som var kraftig för att vara i Sverige. Då frigjordes energin $2{,}75 \cdot 10^{11}$ J. Vilken magnitud motsvarar detta på Richterskalan?

b) Den kraftigaste uppmätta jordbävningen i Sverige kallas Kosteröskalvet och det inträffade den 23 oktober 1904. Magnituden mätte 5,4 på Richterskalan. Hur mycket energi frigjordes vid Kosteröskalvet?

c) Utgå från två olika jordbävningar där den ena har en magnitud som är 5 och den andra har en magnitud som är 7. Hur många gånger större är den frigjorda energin hos den kraftigare jordbävningen jämfört med den frigjorda energin hos den svagare?

d) Utgå återigen från två olika jordbävningar där den ena har en magnitud som är två enheter större än den andra. Undersök generellt hur många gånger större den frigjorda energin är hos den kraftigare jordbävningen jämfört med den frigjorda energin hos den svagare.

FACIT

1. a) $x = 14^{1/7}$ (Ma C HT 2008)

   b) $x = \frac{lg\,14}{lg\,7}$ (Ma C HT 2008)

   c) $x = \sqrt[5]{4}$ (Ma C VT 2011)

   d) $x = lg\,6$ (Ma C HT 2006)

   e) $x = 10^{1/3}$ (Ma C HT 2003)

   f) $x = 10^{0,6}$ (Ma C HT 2005)

2. D (Ma C VT 2003)

3. a) 2

   b) 1003 (Ma C VT 2009)

4. C: 1,9 (Ma C VT 2002)

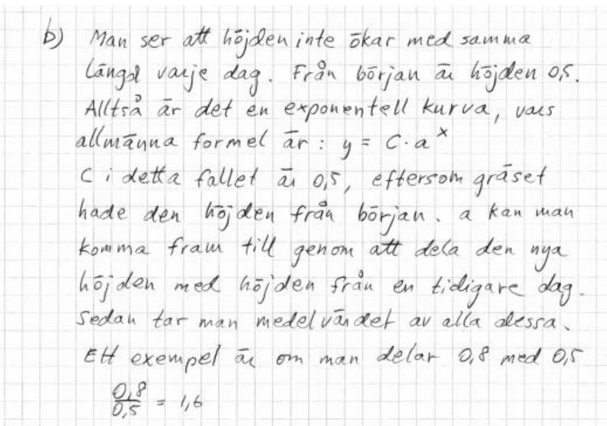
5. 10,6 % (Ma C HT 2009)

6. 28 månader (Ma C HT 2011)

7. a) 22 kg
   b) 1,40 m (Ma C HT 2009)

8. 119 % (Ma C VT 2008)

9. a) 0,5 står för startvärdet och 1,6 står för förändringsfaktorn.
   b) Ex:


b) Man ser att höjden inte ökar med samma
längd varje dag. Från början ä höjden 0,5.
Alltså är det en exponentell kurva, vars
allmänna formel är: $y = C \cdot a^x$
C i detta fallet ä 0,5, eftersom gräset
hade den höjden från början. a kan man
komma fram till genom att dela den nya
höjden med höjden från en tidigare dag.
Sedan tar man medelvärdet av alla dessa.
Ett exempel ä om man delar 0,8 med 0,5
$\frac{0,8}{0,5} = 1,6$

(Ma B VT 2009)

10. a) 21 grader Celsius

    b) 58 minuter (Ma C VT 2009)

11. 7 % (Ma C VT 2009)

12. 23 % (Ma C HT 2011)

13. 120 min. (Ma C HT 2008)

14. 104 000 (Ma C VT 2011)

15. $K = B\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$ (Ma C VT 2011)

16. 72 (Ma C VT 2008)

17. a) 4,4

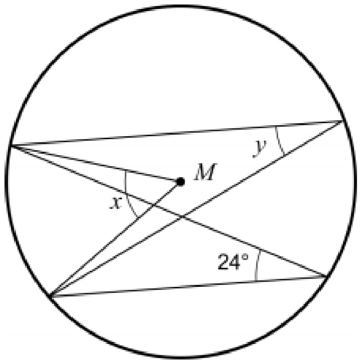
    b) $8,7 \cdot 10^{12}$ J

    c) 1000 gånger större.

    d) Energin hos den svagare är E_s och magnituden är M. Energin hos den kraftigare är E_k och magnituden $M + 2$ (Ma C VT 2011)

Geometri

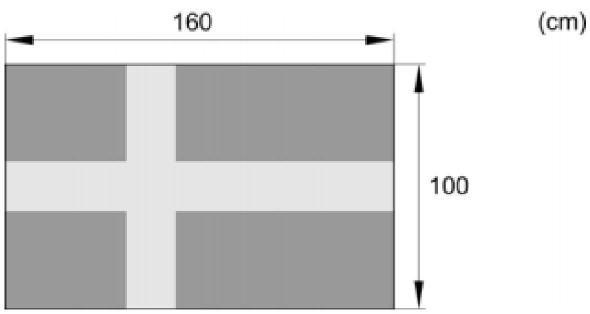
1. Figuren visar en cirkel med medelpunkten M. E



a) Hur stor är vinkeln x?

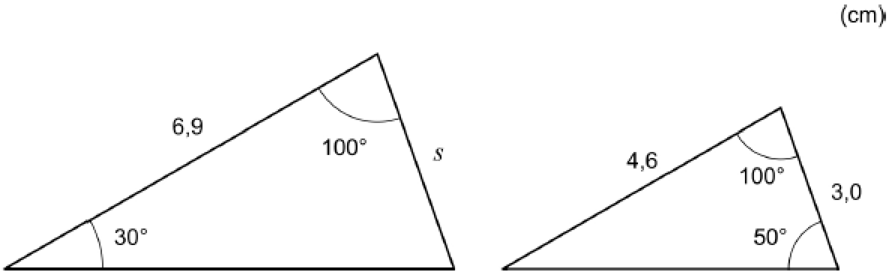
b) Hur stor är vinkeln y?

2. En svensk flagga med långsidan 160 cm och kortsidan 100 cm uppfyller gällande flagglag. Anna vill göra en liten bordsflagga med kortsidan 8 cm. E



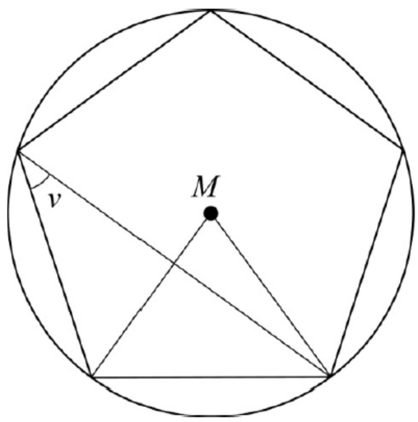
Hur lång ska Anna göra sin flagga för att den ska vara likformig med den stora flaggan?

3. Figuren visar två trianglar. E



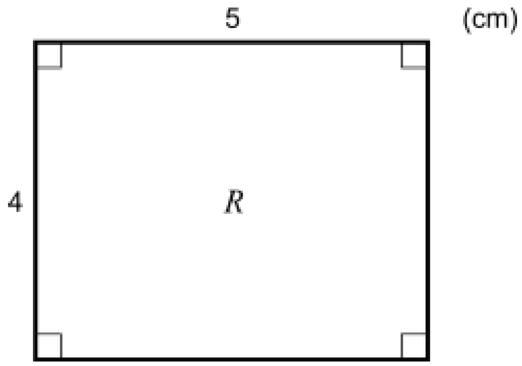
Beräkna längden av sidan s.

4. En regelbunden femhörning är inskriven i en cirkel med medelpunkten M. E



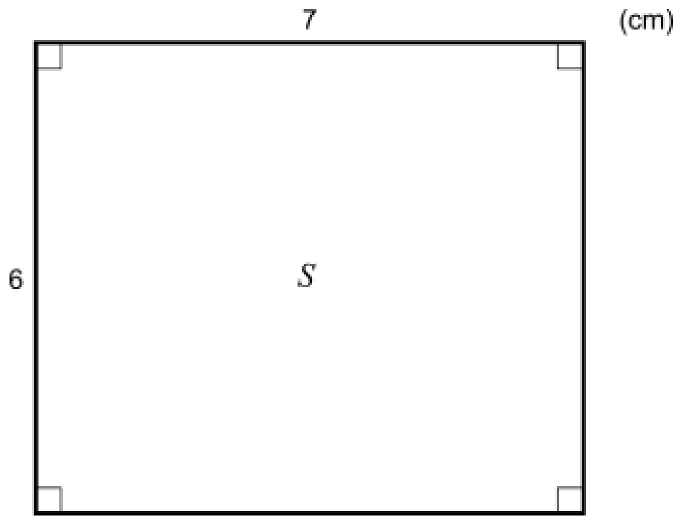
Bestäm vinkeln v.

5. Rektangel R har sidor som är 4 cm och 5 cm. E

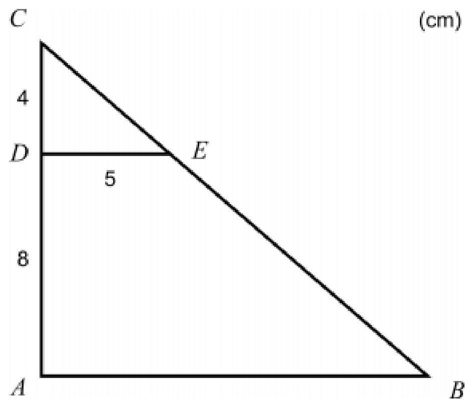


a) Rita en rektangel som är mindre än och likformig med rektangel R.
Ange måtten för den rektangel du ritat.

b) Jämför rektangel R med rektangel S. Avgör om rektanglarna är likformiga.



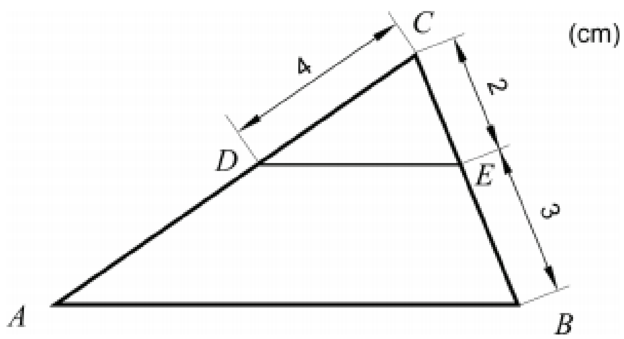
6. I triangeln ABC är sträckan DE parallell med sidan AB. E



Figuren är ej skalenligt ritad

Bestäm längden av sidan AB.

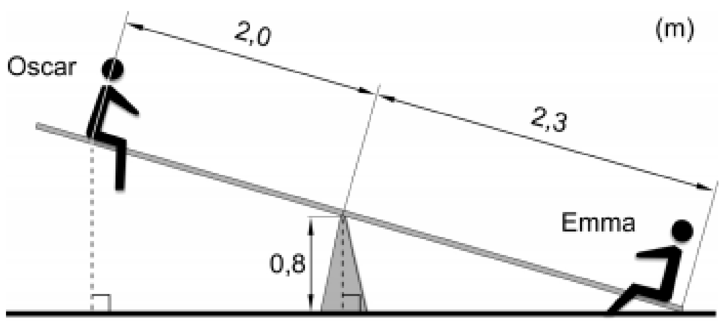
7. I triangeln ABC är sträckan DE parallell med sidan AB. E



Figuren är ej skalenligt ritad

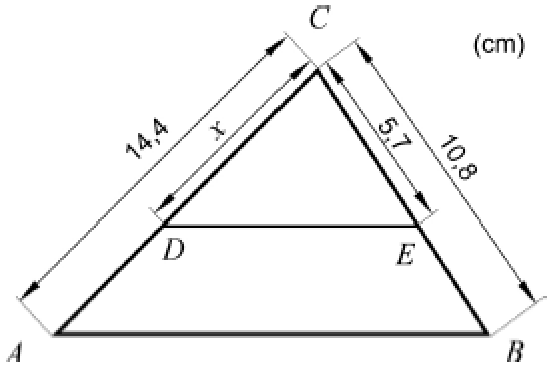
Bestäm längden av sträckan AD.

8. Oscar och Emma ska gunga på en gungbräda. Gungbrädan är fäst på mitten vid en 0,8 meter hög ställning. Oscar sätter sig 2,0 meter från mitten av brädan och Emma sätter sig på andra sidan. Då vippar gungbrädan över så att brädans ände vilar mot marken på Emmas sida, se figur. E



Hur högt över marken sitter Oscar?

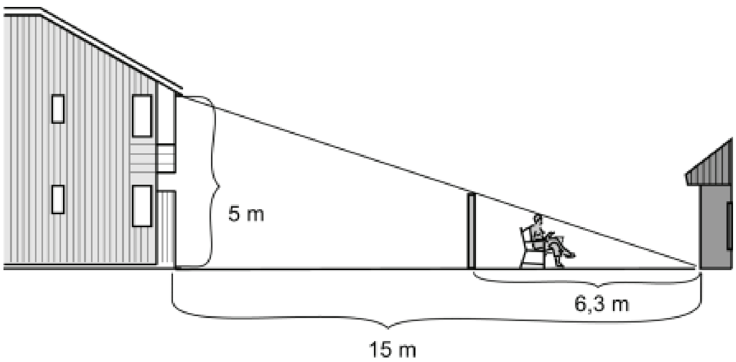
9. I triangeln ABC är sträckan DE parallell med sidan AB. E



Figuren är ej skalenligt ritad

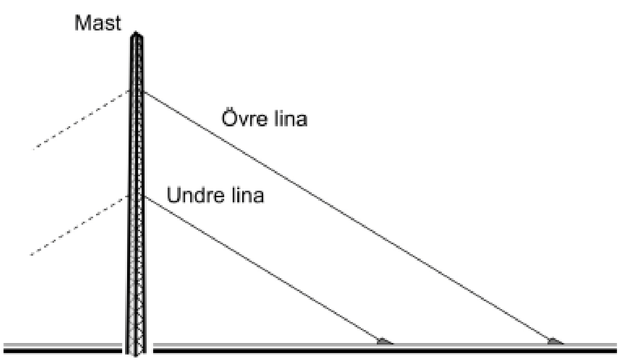
Bestäm x.

10. Familjen Svensson har bestämt sig för att bygga ett insynsskydd på sin uteplats. E



Hur högt ska insynsskyddet vara för att grannfamiljen inte ska se in till familjen Svenssons uteplats?

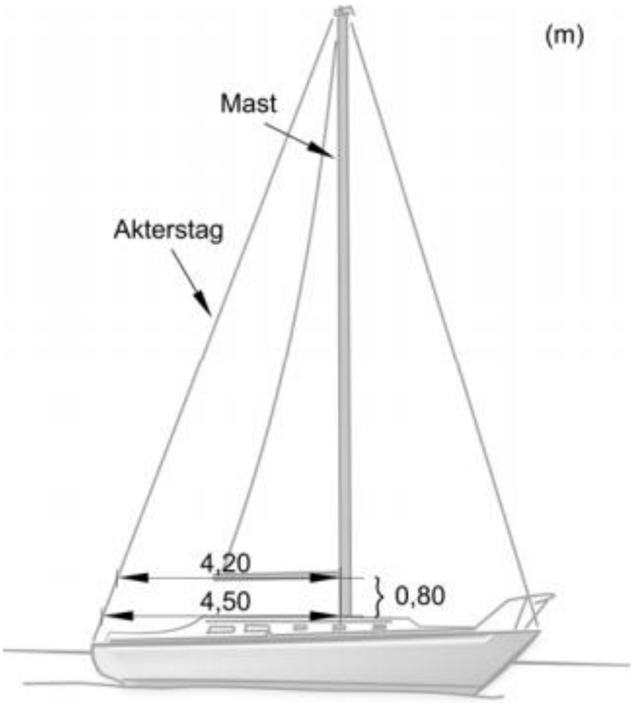
11. En 30 meter hög mast är fastspänd med linor som går från masten snett ner till marken. Den övre linan är 40 meter lång och har sitt fäste 5 meter under mastens topp. Den undre linan har sitt fäste ytterligare 10 meter längre ner på masten. Den är spänd parallellt med den övre linan. E



Hur lång är den undre linan?

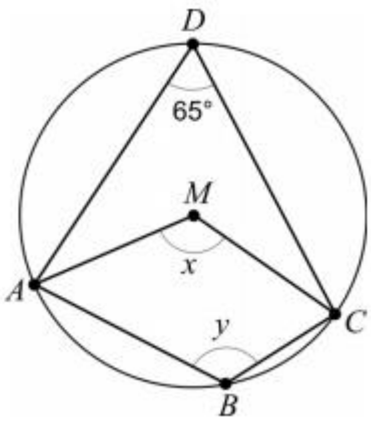
12. Lina och Sara är ute och seglar i en båt som de har lånat. De seglar mot en bro och börjar fundera på om masten är för hög för att båten ska kunna passera under bron. E

För att kunna bestämma mastens höjd gör de några mätningar. Lina och Sara mäter avståndet från mastens fot och rakt ut mot akterstaget och finner att det är 4,50 m. Sedan mäter de avståndet från masten till akterstaget 0,80 m högre upp och parallellt med första mätningen. Det avståndet är 4,20 m.
Se figur.



Använd de mätningar som Lina och Sara har gjort och bestäm mastens höjd.

13. Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel med medelpunkten M. E C

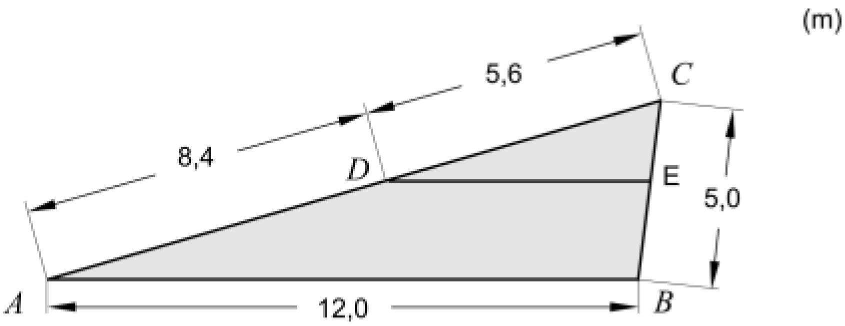


a) Bestäm vinkeln x.

b) Bestäm vinkeln y.

14. Figuren visar triangeln ABC där sträckan DE är parallell med sträckan AB.

E C

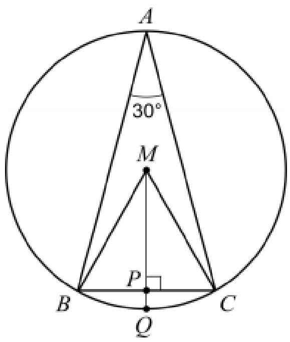


a) Beräkna längden av sträckan DE.

b) Beräkna längden av sträckan BE.

15. I figuren nedan är M cirkelns medelpunkt.

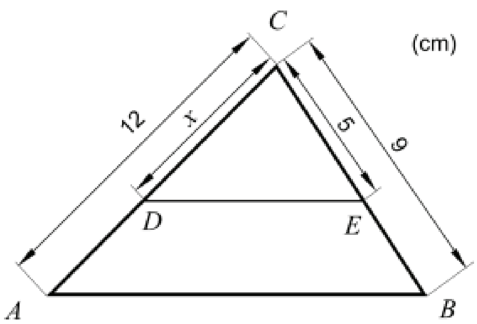
E C



Bestäm avståndet PQ då $BC = 4{,}0$ cm.

16. I triangeln ABC är sidan AC 12 cm och sidan BC 9 cm. En parallelltransversal skär sidan AC i punkten D och sidan BC i punkten E, så att EC blir 5 cm. Sträckan DC är x cm.

E C

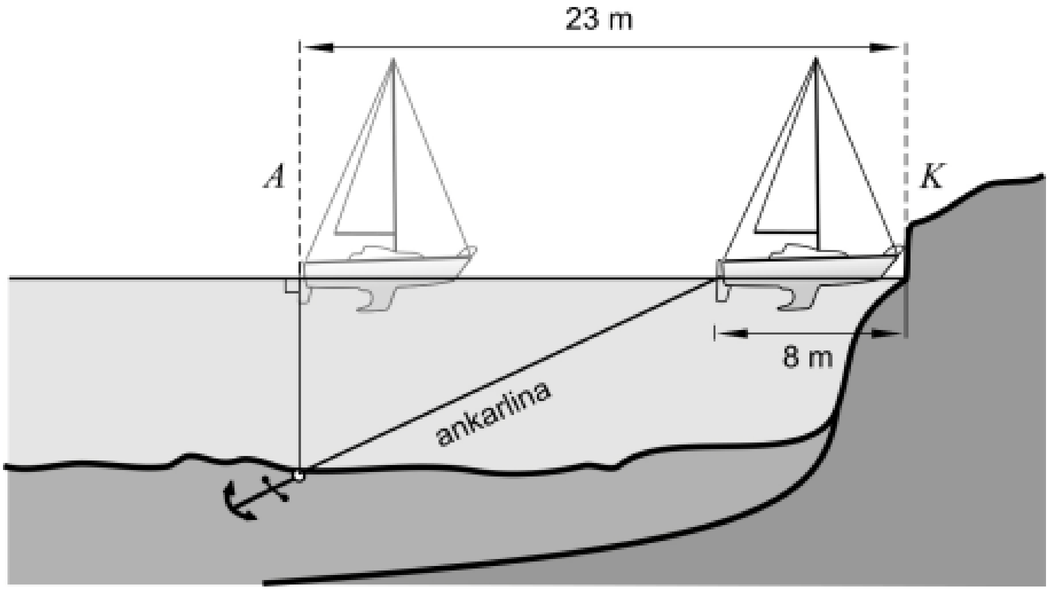


Från vilka två ekvationer 1) till 6) kan ett korrekt värde på x beräknas?

1) $\frac{x}{5} = \frac{12}{9}$ 2) $\frac{x}{5} = \frac{9}{12}$ 3) $\frac{x}{12} = \frac{4}{9}$ 4) $\frac{x}{12} = \frac{9}{4}$ 5) $\frac{12-x}{x} = \frac{5}{9}$ 6) $\frac{12-x}{x} = \frac{4}{5}$

17. En 8 meter lång segelbåt kommer in i en vik för att ankra. Från den plats A där seglaren vill släppa ner sitt ankare är det 23 meter till klippan K. För att ankaret ska fästa bra är det lämpligt att ankarlinan är tre gånger så lång som djupet. När ankaret är på plats driver båten iväg så långt som ankarlinan tillåter.

E C



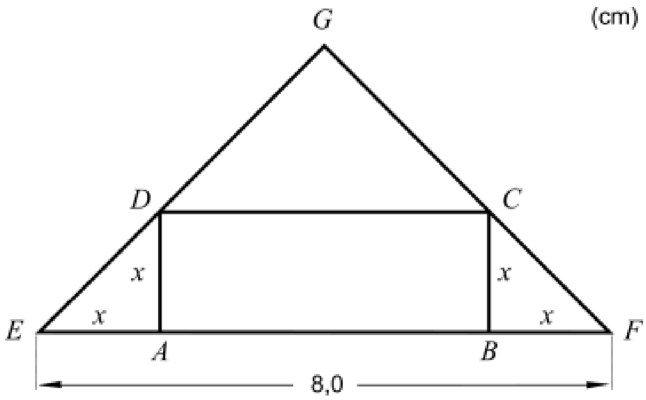
För att båten inte ska slå emot klippan K får det inte vara för djupt där ankaret släpps eftersom ankarlinan ska vara tre gånger så lång som djupet.

a) Finns det en risk att segelbåten slår emot klippan K om djupet vid ankarplatsen A är 7 meter?

b) Hur djupt får det högst vara vid A?

18. Rektangeln $ABCD$ är inskriven i triangeln EFG. Sträckorna EA och BF är lika långa som ena sidan i rektangeln, se figur.

C



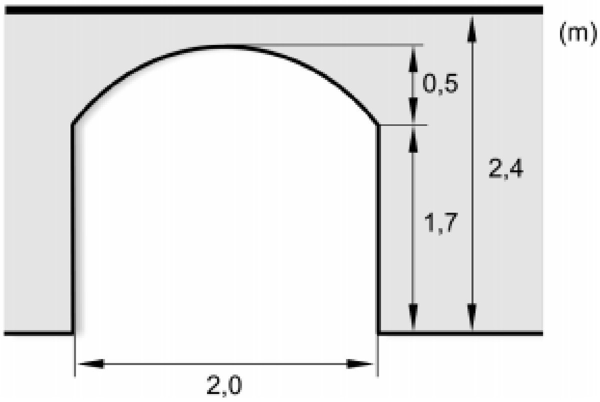
a) Teckna en ekvation med vars hjälp du kan bestämma x om rektangelns area är 6,0 cm^2.

b) Hur stora är rektangelns sidor då arean är 6,0 cm^2?

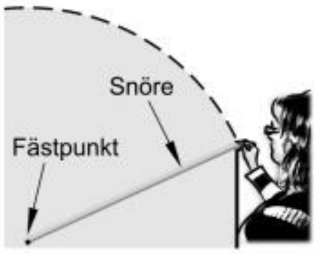
19. I en rätvinklig triangel är den ena kateten 3,0 cm längre än den andra kateten. Hypotenusan är i sin tur 3,0 cm längre än den längsta kateten. C

Beräkna längden av triangelns sidor.

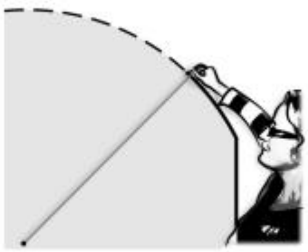
20. Ivans och Annas farfar ska göra ett valv mellan två rum i sin sommarstuga. Han vill att valvet ska ha formen av en cirkelbåge med mått enligt skissen. C



– Vi kan hjälpa dig att rita en cirkelbåge på väggen. Den kan du använda när du ska såga ut valvet, säger Ivan.

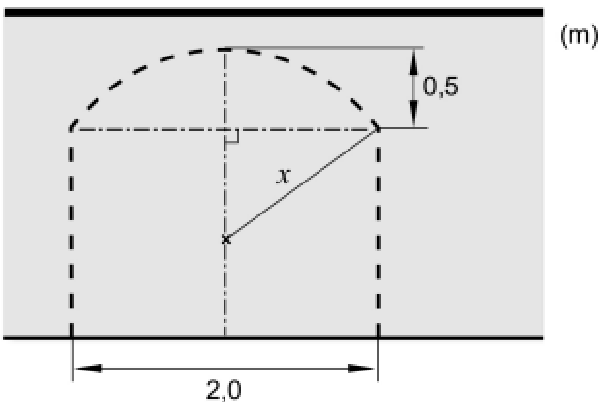


– För att vi ska få en jämn cirkelbåge så kan vi använda ett snöre och en penna så här, säger Anna. Se bilderna.



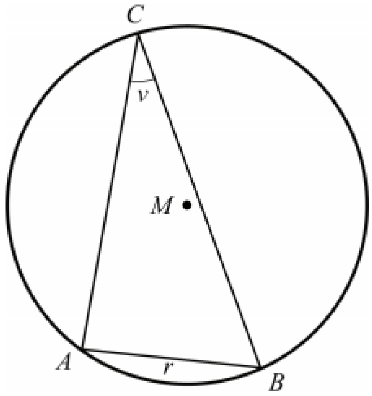
– Men hur bestämmer vi cirkelbågens radie? undrar farfar.
– Den kan vi räkna ut, säger Ivan, och ritar en ny skiss med mått.

Se skiss nedan.



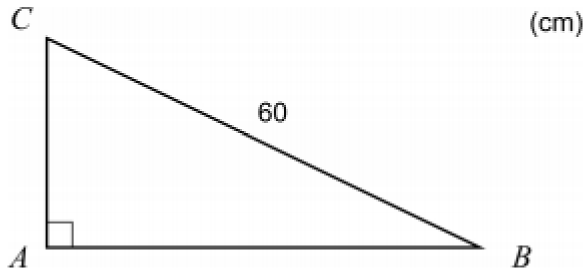
Använd Ivans skiss och räkna ut längden på radien x.

21. Triangeln ABC har sina hörn på en cirkel med medelpunkten M och radien r cm. Sidan AB är r cm. C



Bestäm vinkeln v.

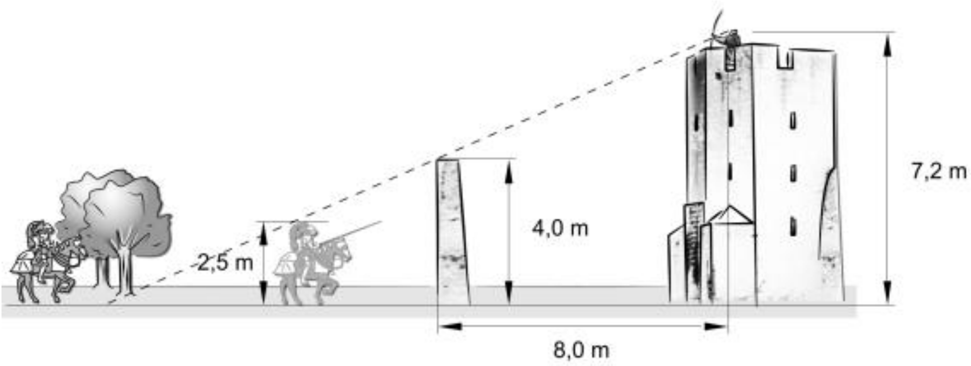
22. I den rätvinkliga triangeln ABC är sidan BC 60 cm, se figur. C



Sidorna AB och AC har tillsammans längden 82 cm.

Beräkna längden på triangelns kortaste sida.

23. Riddar Henric står gömd bakom några träd. Hans plan är att ta sig in i borgen som bevakas av en vakt i tornet. Det gäller att så snabbt som möjligt rida fram mot muren så att vakten inte kan se honom. Vid muren finns en hemlig gång som leder in i borgen. C



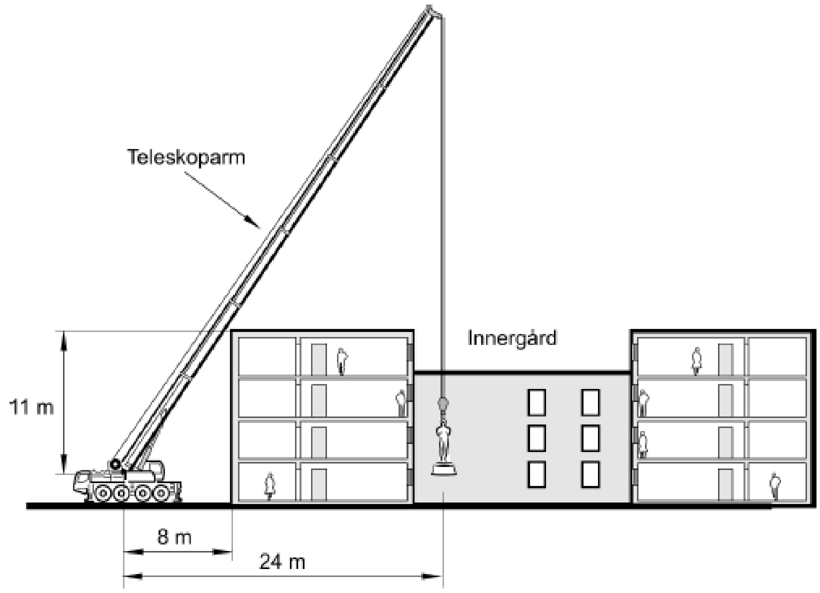
På vilket avstånd från muren är Riddar Henric utom synhåll för vakten?

24. Du har fått i uppdrag av Kran & Lyft AB att planera för ett lyft av en staty. Statyn ska lyftas över ett tak och in på en sluten innergård. Figuren nedan visar huset i genomskärning.

C

Företaget har tillgång till tre kranbilar med olika långa teleskoparmar. En av kranbilarna har en teleskoparm som kan dras ut till 36 meter. De två övriga har teleskoparmar som kan dras ut till 48 meter respektive 54 meter.

Av säkerhetsskäl ska kranbilen ställas så att teleskoparmens fäste hamnar 8 meter från husväggen och då blir avståndet till den plats där statyn ska sättas ner 24 meter. Det lodräta avståndet från teleskoparmens fäste till taket är 11 m för alla kranbilar. Se figur.

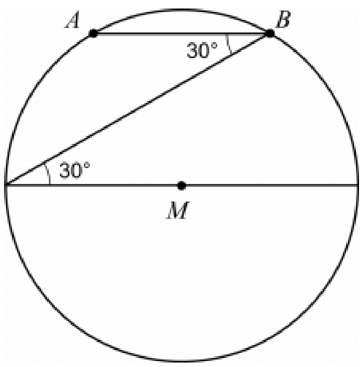


Du har fått veta att det är mest lönsamt att använda den kranbil som har den kortaste teleskoparmen men som ändå klarar lyftet.

Vilken kranbil ska du välja för att det ska vara mest lönsamt?

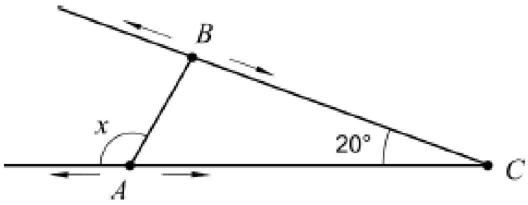
25. Punkterna A och B ligger på randen av en cirkel med medelpunkten M.

C A



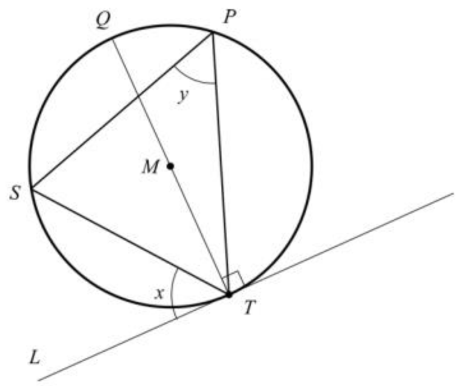
Visa att sträckan AB är lika lång som cirkelns radie.

26. I figuren nedan är vinkeln vid punkten C $20°$. A och B är två fritt rörliga punkter på var sitt vinkelben. Punkterna A och B kan flyttas oberoende av varandra, men utan att sammanfalla med C. När A och B flyttas ändras vinkeln x. Se figur. C A



Vilka värden kan vinkeln x anta?

27. En linje L tangerar en cirkel i punkten T. M är cirkelns medelpunkt. Vinkeln mellan cirkelns diameter QT och linjen L är $90°$. En triangel PST ligger i cirkeln med alla hörnen på cirkelns rand. Se figur. C A

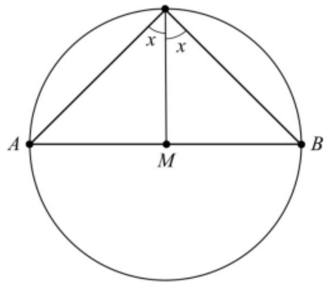


a) Hur stor är vinkeln y då vinkeln x är $56°$?

Om punkterna P och S flyttas längs cirkelns rand kommer vinklarna x och y att variera. För vinkeln x gäller $0° < x < 90°$.

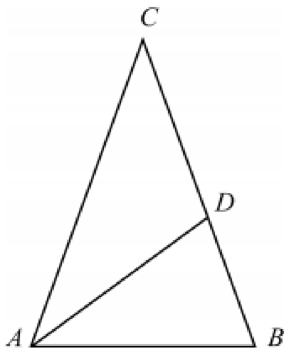
b) Bestäm sambandet mellan vinklarna x och y.

28. Figuren visar en triangel ABC som är inskriven i en cirkel. Sidan AB går genom cirkelns medelpunkt M. Vinklarna ACM och BCM är lika stora. C A



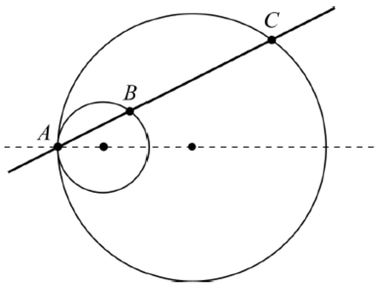
Visa att sträckan CM är vinkelrät mot sträckan AB.

29. I triangeln ABC är sidan AC lika lång som sidan BC. Sträckan AD delar vinkeln CAB mitt itu. C A



Visa att vinkeln ADC alltid är tre gånger så stor som vinkeln CAD.

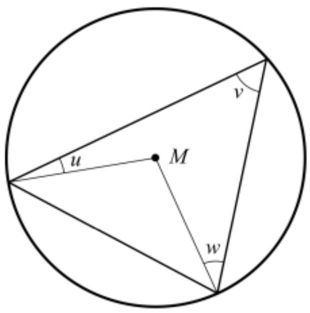
30. De två cirklarna i figuren har sina medelpunkter på den streckade linjen. Cirklarnas radier är 12 cm respektive 36 cm. C A



A är en punkt som ligger på den streckade linjen. Båda cirklarna går genom punkten A. En rät linje som dras genom punkten A skär cirklarna i två punkter B och C.

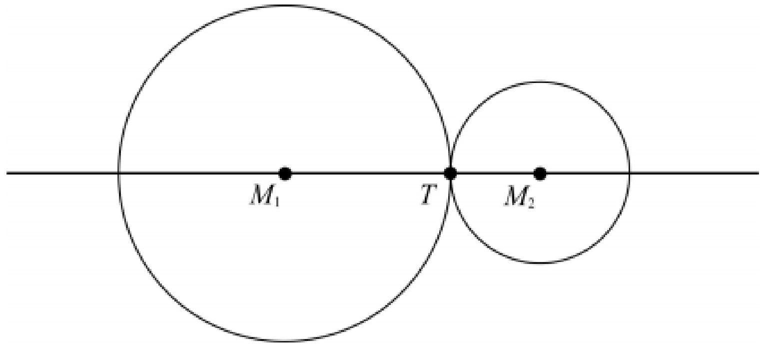
Visa att $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$

31. En triangel är inskriven i en cirkel enligt figuren nedan. Cirkelns medelpunkt M ligger inuti triangeln. C A

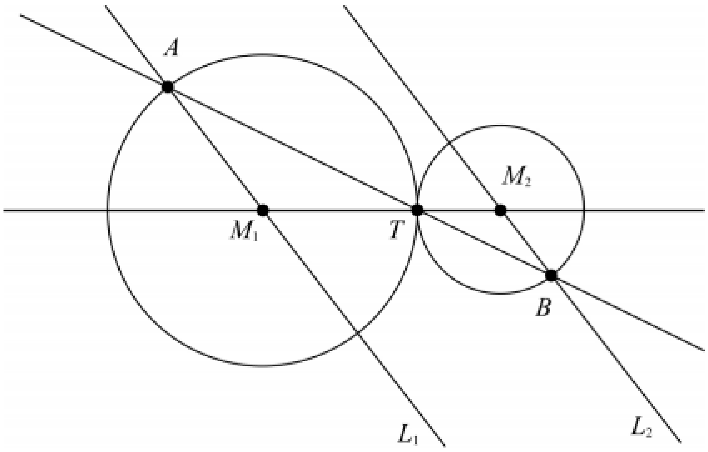


Visa att $v = u + w$

32. Två cirklar tangerar varandra i en punkt T. En linje som går genom cirklarnas medelpunkter M_1 och M_2 går även genom tangeringspunkten T. C A

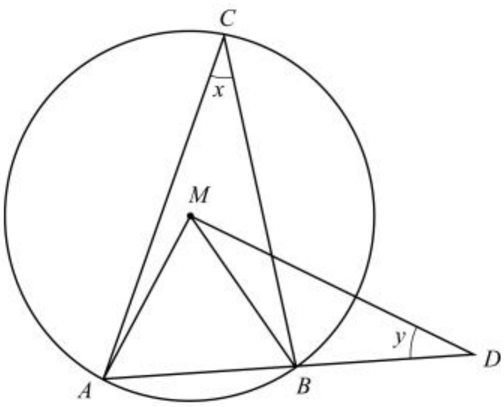


En rät linje dras genom tangeringspunkten och skär cirklarna i punkterna A och B. Ytterligare två linjer L_1 och L_2 dras. Linje L_1 går genom M_1 och A. Linje L_2 går genom M_2 och B.



Visa att linjerna L_1 och L_2 är parallella.

33. I en cirkel med medelpunkt M är en triangel ABC inskriven. Sträckan AB förlängs till punkten D så att BD har samma längd som cirkelns radie. (Se figur.) E C A



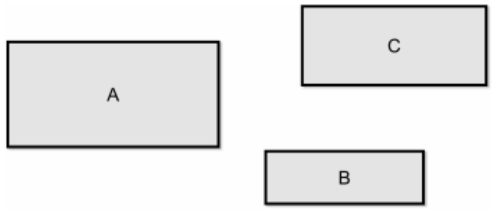
a) Om vinkeln x är 50°, hur stor är då vinkeln y?

b) För vinkeln x gäller $0° < x < 90°$. Bestäm ett samband mellan x och y.

34. Din uppgift är att undersöka rektanglar med en gemensam egenskap: E C A

– Längden är alltid 2 cm större än bredden.

Här ser du tre exempel på sådana rektanglar:



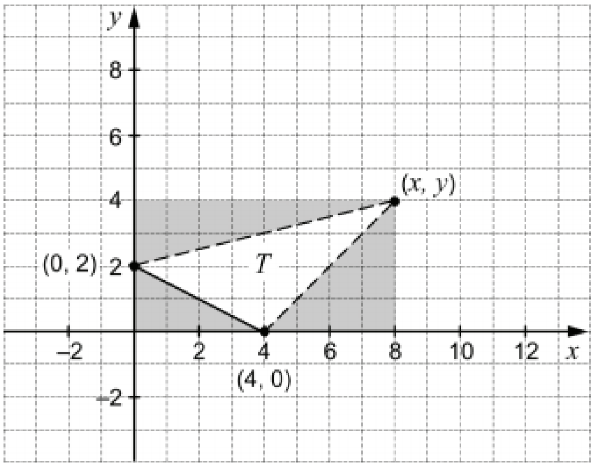
a) Finns det någon rektangel av denna typ som har omkretsen 5 cm?
Finns det någon rektangel av denna typ som har omkretsen 3 cm?

b) Finns det någon rektangel av denna typ som har arean 11,25 cm^2?
Finns det någon rektangel av denna typ som har arean 1 cm^2?

c) Finns det någon rektangel av denna typ där diagonalen är 8 cm?
Finns det någon rektangel av denna typ där diagonalen är 1 cm?

d) Skriv formler för rektangelns omkrets, rektangelns area och diagonalens längd uttryckt i en variabel för denna typ av rektanglar. Undersök vilka begränsningar det finns i de värden som omkretsen, arean och diagonalen kan ha.

35. I den här uppgiften ska du undersöka var det tredje hörnet i en triangel kan ligga för att arean ska ha en given storlek. Två av triangelns hörn är alltid placerade i punkterna (0, 2) och (4, 0). Det tredje hörnet ligger i punkten (x, y). Punkten (x, y) ligger i första kvadranten. I triangeln T nedan är det tredje hörnet placerat i punkten (8, 4). E C A

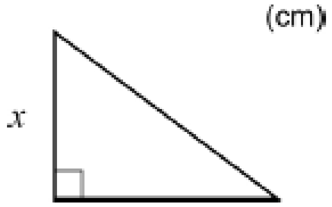


a) Visa att triangelns area är 12 areaenheter.

Låt nu koordinaterna för det tredje hörnet variera.

b) Undersök och beskriv var det tredje hörnet kan ligga för att ge en triangel med arean 12 areaenheter.

36. I den här uppgiften ska du undersöka en viss typ av rätvinkliga trianglar. I dessa trianglar är längdskillnaden mellan den korta kateten och hypotenusan dubbelt så stor som längdskillnaden mellan den korta och långa kateten. E C A



I figuren ser du ett exempel på en sådan rätvinklig triangel. Den korta kateten är x cm lång. Den långa kateten är 3 cm längre än den korta kateten. Hypotenusan är 6 cm längre än den korta kateten.

a) Skriv uttryck för längderna av den långa kateten och hypotenusan. Bestäm sedan den korta katetens längd.

I en annan triangel av denna typ är den långa kateten 2 cm längre än den korta kateten. Hypotenusan är 4 cm längre än den korta kateten.

b) Bestäm den korta katetens längd i detta fall.

	Längdskillnad mellan kort katet och lång katet	**Längdskillnad mellan kort katet och hypotenusa**	**Längd av kort katet**
1:a triangeln	3 cm	6 cm	?
2:a triangeln	2 cm	4 cm	?
...	...	...	...

Mellan längden på den korta kateten och längdskillnaden mellan den korta och långa kateten finns det ett samband för denna typ av trianglar.

c) Undersök den här typen av trianglar. Formulera utifrån din undersökning en slutsats om sambandet mellan längden på den korta kateten och längdskillnaden mellan den korta och långa kateten.

FACIT

1. a) 48°

   b) 24° (Ma B VT 2012)

2. 12,8 cm (Ma B VT 2011)

3. 4,5 cm (Ma B HT 2010)

4. 36° (Ma B HT 2010)

5. a) Rektangel med t.ex. sidorna 2 cm och 2,5 cm

   b) När man delar samma sidor i R och S blir det inte lika (1,5 och 1,4). (Ma B HT 2009)

6. 15 cm (Ma B HT 2009)

7. 6 cm (Ma B HT 2008)

8. 1,5 m (Ma B HT 2011)

9. 7,6 (Ma B VT 2010)

10. $x = 2{,}1$ m (Ma B VT 2008)

11. 24 m (Ma B VT 2009)

12. 12 m (Ma B VT 2011)

13. a) 130°

    b) 115° (Ma B HT 2012)

14. a) 4,8 m

    b) 3,0 m (Ma B HT 2012)

15. 0,54 cm (Ma B HT 2008)

16. 1) och 6) (Ma B VT 2008)

17. a) Ja
    b) Djupet får vara högst 5,3 meter. (Ma B VT 2009)

18. a) $x(8 - 2x) = 6$

    b) l cm och 6 cm eller 3 cm och 2 cm (Ma B VT 2009)

19. 9 cm, 12 cm och 15 cm (Ma B HT 2008)

20. korrekt uppställd ekvation, t.ex. $(x - 0{,}5)^2 + 1^2 = x^2$
    1,25 m (Ma B HT 2011)

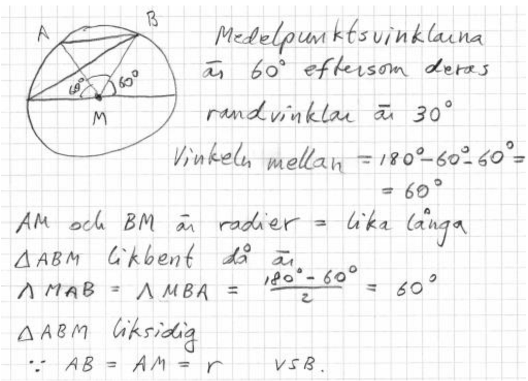
21. 30° (Ma B VT 2008)

22. 30 cm (Ma B VT 2012)

23. 3,75 m (Ma B VT 2012)

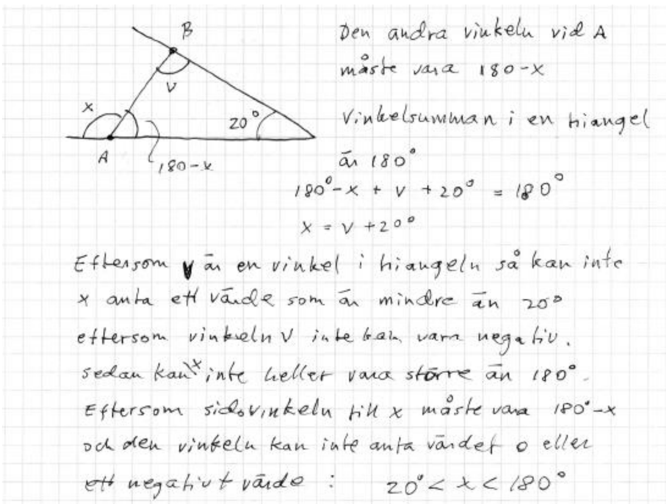
24. bestämmer avståndet från kranbilen till husets tak med hjälp av Pythagoras sats kranbil med 48 meter lång teleskoparm (Ma B HT 2010)

25. Ex:



(Ma B VT 2009)

26. $20° < x < 180°$



(Ma B VT 2010)

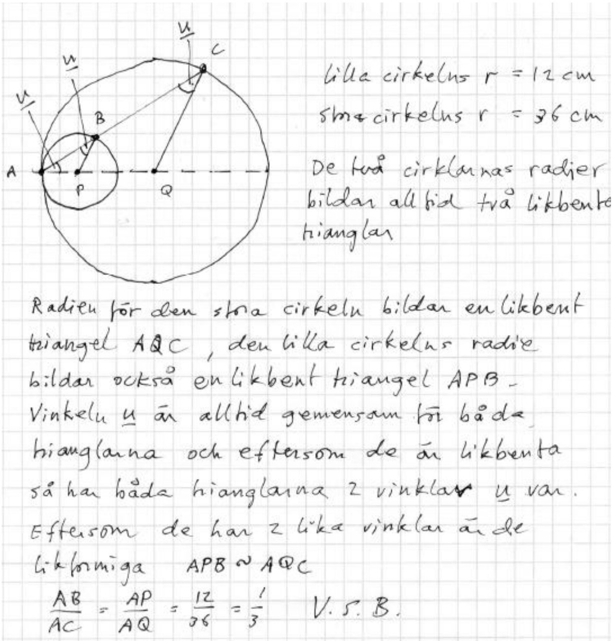
27. a) $y = 56°$

    b) $x = y$ (Ma B VT 2011)

28. - (Ma B HT 2012)

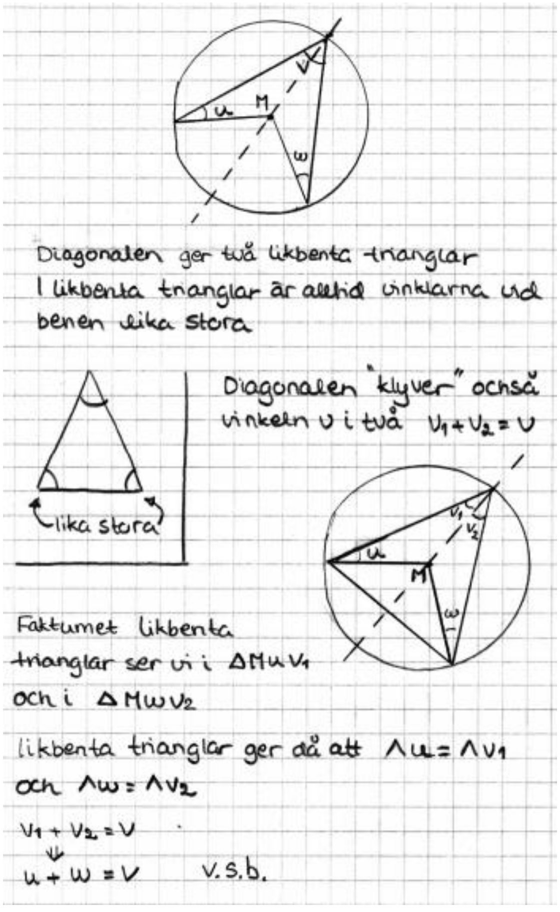
29. (Ma B VT 2008)

30.



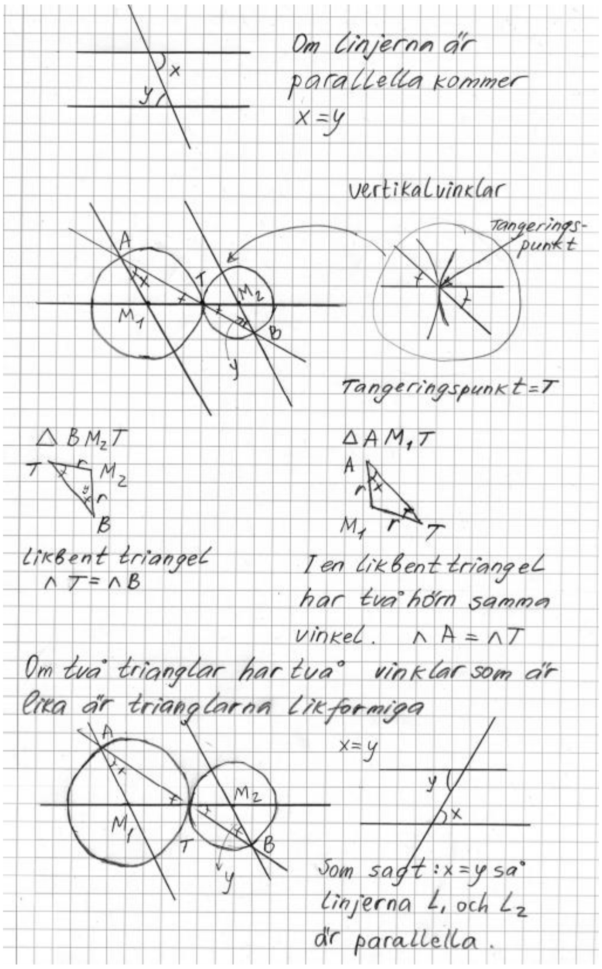
(Ma B VT 2010)

31.



(Ma B HT 2011)

32.



(Ma B HT 2010)

33. a) 20°
b) $x + 2y = 90°$ (Ma B HT 2009)

34. Ex:

Elevlösning 2 (4 g och 4 vg och tre MVG-kvaliteter)

- Omkrets 5 cm?

0,25 ▭ 0,25 $O = 5$

Ja

- Omkrets 3cm?

Nej eftersom långsidorna måste vara > 2 detta att $O > 4$

Formel

$x = \frac{O-4}{4}$ O= omkrets , x = kortsida

$4x + 4 = O$

x = kortsida $(x+2)x = 11{,}25$

- Area $11{,}25\ cm^2$? $x^2 + 2x - 11{,}25 = 0$

Ja 4,50 cm · 2,50 cm $x = -1 \pm \sqrt{12{,}25}$

$x = 2{,}50$

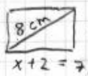
$x+2 = 4{,}50$

- Area $1\ cm^2$?

Eftersom en sida också kan vara 0,5 eller så Ja 2,41 cm · 0,41 cm ≈ 1 cm^2

Formel

$(x+2) \cdot x = A$ x = kortsida

- 

$x = 5{,}48$

$x+2 = 7{,}48$

Pythagoras sats ger

$(x+2)^2 + x^2 = 8^2$

$x^2 + 4x + 4 + x^2 = 64$

$2x^2 + 4x + 4 = 64$

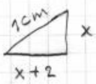
$2(x^2 + 2x + 2) = 64$

$x^2 + 2x - 30 = 0$

$x = -1 + \sqrt{1 + 30}$

$x = 5{,}48$, $x+2 = 7{,}48$

Ja när sidorna är 5,48 och 7,48



Eftersom diagonalen upphöjt i 2 är lika mycket som höjden upphöjd i 2 adderat med bredden upphöjd i 2 måste diagonalen vara längre än båda sidorna då inte heller en längd kan vara minus så måste x+2 cm vara större än 1cm. därför finns det ingen rektangel av denna typ med diagonalen 1.

Formel

$y^2 = (x+2)^2 + x^2$ y = diagonal

Formler

Omkrets : $4x + 4 = O$

Begränsningar $O > 4$

$x > 0$

Aria : $x(x+2) = A$

Begränsningar : $x > 0$

Diagonal : $y^2 = (x+2)^2 + x^2$

$y > 2$

$x > 0$

Vad jag vet finns det ingen övre gräns på någon av dessa.

(Ma B HT 2009)

35. Ex:

- T ligger i en skuggad rektangel med arean

$8 \cdot 4 = 32$ ae

De omgivande trianglarna har areorna

$\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$ $\frac{8 \cdot 2}{2} = 8$ $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ Totalt 20ae

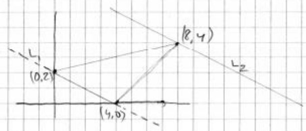
32 ae - 20ae = 12ae

Triangel T:s area är alltså 12 ae

- Linjen L_1 mellan punkterna på koordinataxlarna är bas i triangeln.

Ska triangeln ha samma area om (x, y) flyttas måste höjden vara samma om basen är densamma

Om vi förlänger basen kan vi se vilka punkter som ger samma höjd



Punkter som ligger på den givna höjden ligger på L_2 som är parallell med L_1. L_1 har ekv. $y = -0{,}5x + 2$

L_2 har samma lutning som L_1 då de är parallella dvs $k = -0{,}5$

Punkten (8, 4) ligger på L_2 $\frac{y-4}{x-8} = -0{,}5$

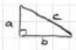
$y - 4 = -0{,}5(x - 8)$

$y = -0{,}5x + 8$

Alla punkter som ligger på linjen $y = -0{,}5x + 8$ kan användas som tredje hörn i en triangel med arean 12 ae.

(Ma B HT 2008)

36.



Långa kateten : $(x+3)$ Pythagoras sats: $a^2+b^2=c^2$

Hypotenusan : $(x+6)$

$(x+6)^2 = x^2 + (x+3)^2$

$x^2+12x+36 = x^2+x^2+6x+9$

$x^2+6x+36 = 2x^2+9$

$x^2+6x+27 = 2x^2$

$6x+27 = x^2$ $x^2-6x-27=0$

$-6=p$ $-27=q$

pq-formel
om $x^2+px+q=0$ så
gäller:
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{(-3)^2+27}$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{36}$

$x_{1,2} = 3 \pm 6$

$x_1 = 9$

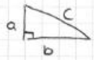
$x_2 = -3$

x_2 kan inte vara korta kateten eftersom
sträckan då blir negativ

Korta kateten: x

Långa –"– : $x+2$

Hypotenusan: $x+4$



Enligt pythagoras sats $(a^2+b^2=c^2)$

$(x+4)^2 = x^2+(x+2)^2$

$x^2+8x+16 = x^2+x^2+4x+4$

$4x+12 = x^2$ $x^2-4x-12=0$

pq-formeln $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+12}$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{16}$

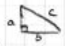
$x_{1,2} = 2 \pm 4$

$x_1 = 6$

$x_2 = -2$ x_2 kan inte korta katetens längd
eftersom en längd inte kan vara negativ

Korta kateten = x

Långa –"– = $x+b$



Hypotenusan = $x+2b$ $(a^2+b^2=c^2)$

$(x+2b)^2 = x^2+(x+b)^2$

$x^2+4xb+4b^2 = x^2+x^2+2xb+b^2$

$x^2+4xb+3b^2 = 2x^2+2xb$

$x^2+2xb+3b^2 = 2x^2$

$2xb+3b^2 = x^2$

$x^2-2xb-3b^2=0$

$-2b=p$ $-3b^2=q$

pq-formeln $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2+3b^2}$

$x_{1,2} = b \pm \sqrt{4b^2}$

$x_{1,2} = b \pm 2b$

$x_{1,2} = b \pm 2b$

$x_1 = b+2b$

$x_2 = b-2b$

x_2 kommer aldrig kunna vara katet eftersom det
ger en negativ sträcka. Alltså $x=3b$

Svar: $x=3b$

(Ma B HT 2010)

Statistik

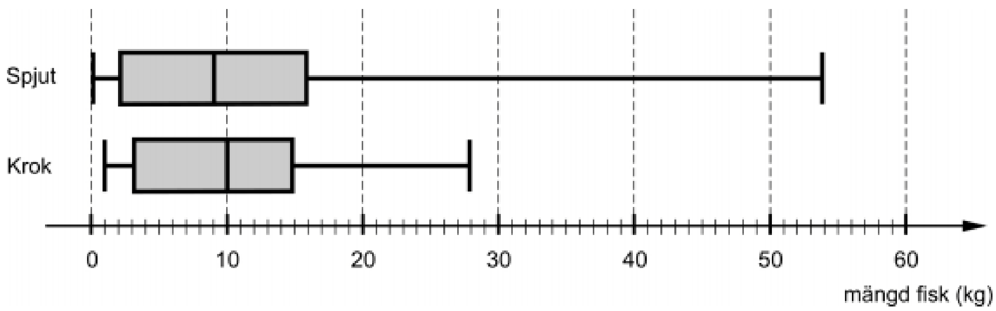
1. Niklas mormor har lovat att hon ska köpa en cykel åt honom som är lika bra som hans kamraters cyklar. För att kunna jämföra cyklarna frågar Niklas sina kamrater hur mycket deras cyklar kostade. Han fick följande svar: E

12 100 kr 4 150 kr 850 kr 2 300 kr 4 150 kr 1 200 kr 3 500 kr

a) Bestäm variationsbredden för cykelpriserna.

b) Niklas vill övertyga mormor att köpa en så dyr cykel som möjligt. Vilket av lägesmåtten medelvärde, median eller typvärde är då mest taktiskt att använda? Motivera ditt svar.

2. Två forskare undersökte fisket i byn Gwaimasi i regnskogen på Nya Guinea. De registrerade hur mycket fisk som var och en av männen i byn fångade under ett år. Det fanns 14 män i byn och var och en av dem använde två fiskemetoder, spjut och krok. Resultatet av undersökningen redovisas med lådagram och tabell. E



I tabellen visas medelvärde och median av årlig fångst per man och fångstmetod.

	Median (kg)	Medelvärde (kg)
Spjut	9,2	14,7
Krok	10,0	10,3

a) Hur mycket fisk fångade den fiskare som lyckades bäst med krok?

b) Hur många procent av männen som använde krok fick fångster mellan 3 kg och 15 kg?

c) Hur stor mängd fisk fångade de 14 männen totalt under året?

3. Företaget Rund Plast AB tillverkar bland annat innebandybollar. Varje månad tillverkas 50 000 innebandybollar. Efter klagomål från kunder beslöt Rund Plast AB:s ledning att göra en kvalitetskontroll. Under en månad kontrollerades kvaliteten på var 200:e innebandyboll som tillverkades. Man hittade 11 bollar som var av dålig kvalitet.

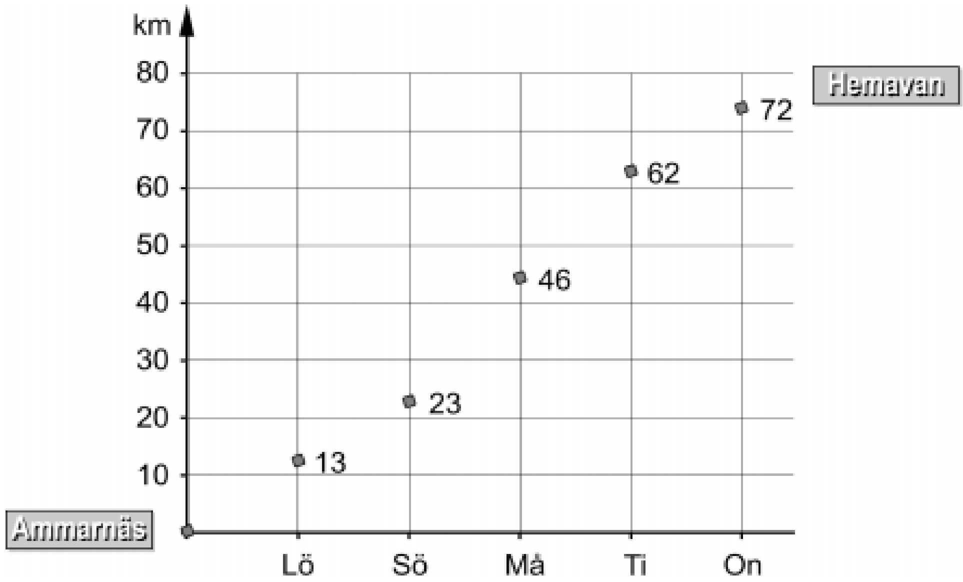
E

a) Här ovan beskrivs en stickprovsundersökning. Hur stort var stickprovet?

b) Hur många av de innebandybollar som tillverkades under en månad kan antas ha varit av dålig kvalitet?

4. Mia och Pia börjar sin fjällvandring i Ammarnäs. Deras mål är Hemavan som ligger 72 km bort. Varje kväll noterar de hur långt de har kommit från Ammarnäs. Diagrammet nedan illustrerar deras vandring.

E



a) Hur långa var dagsetapperna i genomsnitt?

b) Hur stor var variationsbredden i dagsetappernas längd?

5. I en kommun finns det två gymnasieskolor, Östra och Västra. I Östra går det 1350 elever och i Västra 520 elever. I kommunen har diskussioner förts om att förbjuda försäljning av godis i cafeterian på skolorna. För att ta reda på vad eleverna tycker har skolornas elevråd gemensamt gjort en undersökning. De valde ut några SP-klasser på varje skola till vilka frågan ställdes: "Tycker du att man ska få köpa godis i skolan?" E

Svaren framgår av tabellen:

Skola	Antal icke svarande	Antal ja	Antal nej
Östra	17	27	58
Västra	30	49	16

Elevråden sammanfattade undersökningen på följande sätt:
Andel "Ja": $\frac{27+49}{27+49+58+16} \approx 51\ \%$
Alltså: En majoritet av eleverna på gymnasiet tycker att man ska få köpa godis i skolan.

Några elever har kritiska synpunkter på undersökningen och elevrådens slutsats.

Ange två kritiska synpunkter.

6. Jane och Axel funderar på att hyra en minigolfbana på kommunens campingplats. Minigolfbanan är öppen varje sommar under perioden 15 maj-31 augusti. För denna period skulle de få betala 100 000 kr i hyra till kommunen. E

De pratade med Diana som tidigare hyrt minigolfbanan och frågade:
- Var det många besökare under perioden?
Hon svarade:
-Medelvärdet var 45 spelare per dag men medianen var 55 spelare per dag.

Spelavgiften är bestämd till 20 kr per spelare. Skulle det löna sig för Jane och Axel att hyra minigolfbanan?

7. En företagare tillverkar skidhandskar i färgerna mörkblå, grå och svart. För att få en bättre uppfattning om färgernas popularitet bland ungdomar så skickade han ut en enkät. Enkäten skickades ut till 500 ungdomar som går på en gymnasieskola. Av de 297 svaren som han fick in framgick att 19 % föredrar mörkblå, 41 % grå och 40 % svarta handskar.

   Eftersom bortfallet var stort gjorde han en undersökning av bortfallsgruppen. Han ringde därför slumpvis upp 55 av de ungdomar som inte skickat in enkäten och då svarade 10 av dem mörkblå, 23 grå och de övriga svart.

   Kommentera resultatet av bortfallsundersökningen.

E C

8. För att undersöka trivseln hos de boende i området Villaliden skickade kommunen ut en enkät till vart och ett av de 1 337 hushållen i området. Enkäten besvarades av 54 % av hushållen. I enkäten fanns bland annat följande fråga: ”Skulle du rekommendera dina vänner och bekanta att flytta till Villaliden?”. Av dem som svarade på enkäten hade 91 % svarat ”Ja” på denna fråga.

   Resultatet från enkätundersökningen sammanställdes i en broschyr. Bilden visar broschyrens framsida.

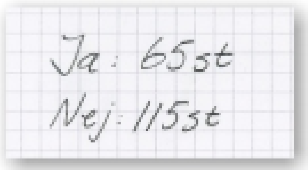
E C

a) På vilket sätt är informationen på broschyrens framsida vilseledande?

b) Undersök mellan vilka procenttal andelen som svarar ”Ja” skulle kunna ligga om alla hushållen svarat på enkäten.

9. Styrelsen i föreningen Freja planerar att investera i en ny musikanläggning. Eftersom anläggningen är dyr skickade de ut mejl till de 520 medlemmarna. Mejlet avslutades med frågan: ”Tycker du att föreningen ska köpa musikanläggningen?” E C

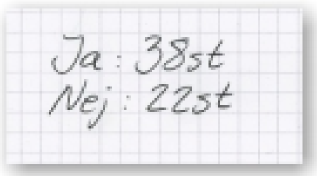
Svaren via mejl sammanställdes:



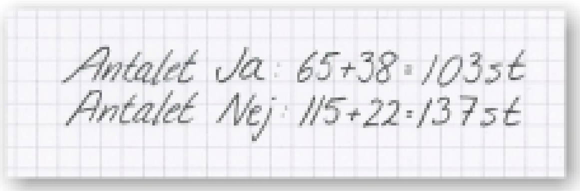
a) Hur stor var bortfallsgruppen uttryckt i procent?

Styrelsen bestämde sig för att undersöka bortfallet. De ringde till 60 slumpvis utvalda medlemmar i bortfallsgruppen och ställde frågan igen.

Svaren via telefon sammanställdes:



På nästa styrelsemöte diskuterade sekreteraren och kassören resultatet:
Kassören: ”Jag har sammanställt alla svar vi fått in via mejl och telefon.

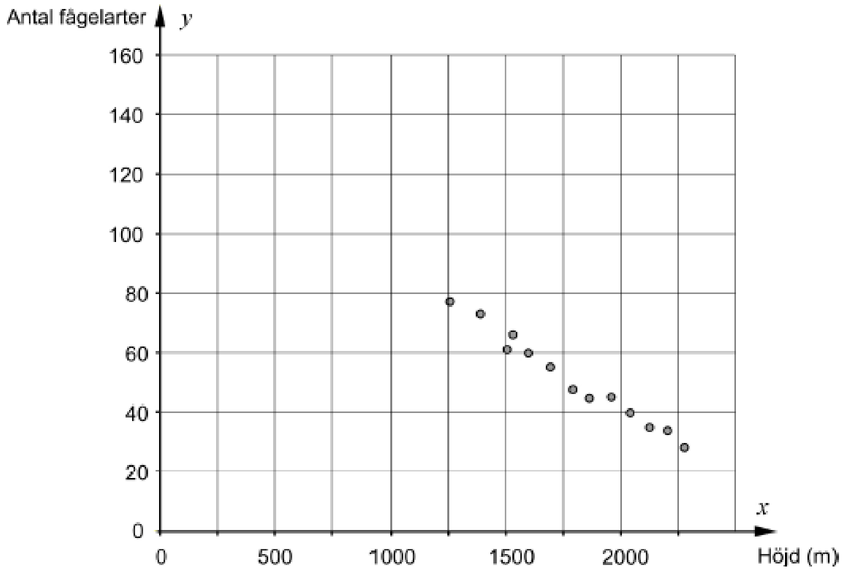


Det är alltså fler som svarat nej och då kan vi ju inte köpa musikanläggningen.”

Sekreteraren: ”Det håller jag inte med om. Man måste ta hänsyn till storleken på bortfallsgruppen. Då blir resultatet annorlunda och vi har stöd för att köpa anläggningen.”

b) Visa med beräkningar att sekreteraren kan ha rätt.

10. Forskare har undersökt antalet fågelarter på berget Mount Karimui på Nya Guinea. De har funnit ett linjärt samband mellan höjden över havet och antalet fågelarter. I koordinatsystemet nedan är deras resultat sammanställda. C

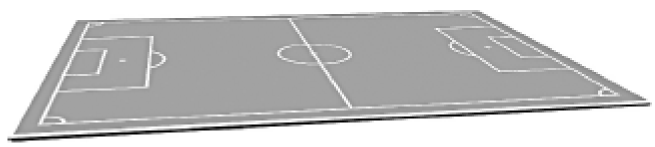


a) Dra en rät linje som så bra som möjligt ansluter till punkterna ovan. Bestäm ett samband på formen $y = kx + m$ för den räta linje som du har ritat.

b) Mount Karimui är 2500 meter högt. Hur många fågelarter finns det på bergets topp enligt sambandet som du har bestämt?

11. En fotbollsklubb ska anlägga en ny fotbollsplan. För att avgöra om planen ska ha konstgräs eller vanligt gräs genomförde klubben en medlemsomröstning. Alla 1 500 medlemmar tillfrågades och 1 140 svarade. Av dessa svarade 63,8 % att de ville ha konstgräs. C

Inför beslutet i styrelsen kom ett önskemål från en medlem om att bortfallet måste granskas. Hon menade att det inte är säkert att en majoritet av medlemmarna vill ha konstgräs.



Kan det vara så att det finns en majoritet bland medlemmarna för vanligt gräs?

12. Bestäm fem olika positiva heltal så att följande gäller: C A

- Medelvärdet är 5
- Medianen är 4
- Variationsbredden är så stor som möjlig

13. Dante och Elsa diskuterar medelvärde och median. C A

Dante påstår: ”Medelvärdet av tre på varandra följande heltal är alltid lika med talens median.”

Elsa svarar: *”Nej, det gäller inte alltid.”*

Vem har rätt, Dante eller Elsa? Motivera ditt svar.

14. Ett företag har 50 anställda. Vid en löneförhandling gavs ett förslag där timlönen skulle höjas med 5 kronor för gruppen med lägst timlön och för gruppen med högst timlön, se tabell. E C A

Antal anställda	Timlön (kr)	Ny timlön (kr)
21	90	95
20	100	100
6	110	110
3	120	125

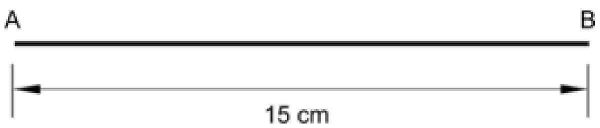
Chefen: ”Då kommer vi att få ett högre löneläge och ökad lönespridning i firman.”

Fackombudet: ”Det kan jag inte hålla med om. Jag anser att löneläget och lönespridningen blir oförändrade.”

a) Undersök hur medelvärde, median och variationsbredd förändras om förslaget genomförs.

b) Använd dina resultat för att finna argument som fackombudet och chefen kan använda för att stödja sina påståenden.

15. En sträcka *AB* är 15 cm lång. Sträckan kan delas i fem delsträckor på olika sätt. Längden av varje delsträcka måste vara större än noll. E C A



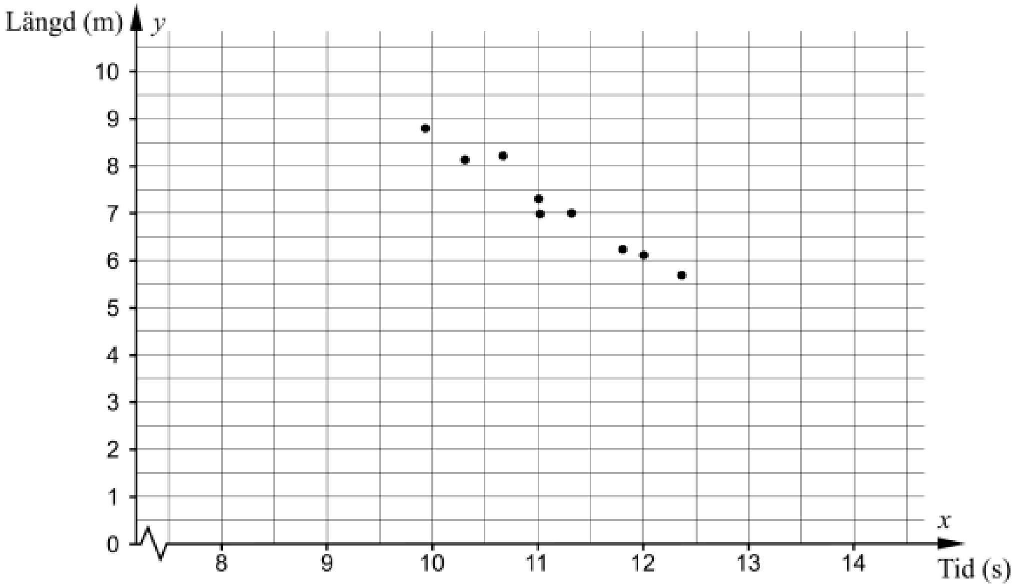
a) Gör en indelning av sträckan *AB* så att variationsbredden för delsträckornas längder blir 12,5 cm.

Beroende på hur man delar in sträckan *AB* i fem delsträckor kan variationsbredden variera.

b) Utred vilka värden som är möjliga för variationsbredden när man ändrar på de fem delsträckornas längder.

16. Nio personer som tävlar i både längdhopp och 100 meter löpning uppger sina bästa resultat. Deras resultat är markerade i diagrammet nedan. Diagrammet visar att det verkar finnas ett linjärt samband mellan hopplängd och tid på 100 meter löpning.

E C A



a) Dra en rät linje som så bra som möjligt visar sambandet mellan hopplängd och tid på 100 meter. Bestäm ekvationen för denna linje på formen $y = kx + m$.

Sambandet kan ses som en modell för hur hopplängd beror av tid på 100 meter löpning.

b) Usain Bolt har världsrekordet på 100 m löpning med tiden 9,58 sekunder. Hur långt skulle Usain Bolt kunna hoppa i längdhopp enligt modellen?

c) Undersök om modellen har några begränsningar.

FACIT

1. a) 11 250 kr

   b) Medelvärde = 4036 kr, median = 3500 kr och typvärde = 4150 kr
   Niklas ska välja typvärdet. (Ma B HT 2008)

2. a) 28 kg

   b) 50 %

   c) 350 kg (Ma B VT 2009)

3. a) 250 innebandybollar

   b) 2200 bollar. (Ma B VT 2011)

4. a) 14,4 km

   b) 13 km (Ma B VT 2008)

5. T.ex. "Ej gjort urvalet slumpmässigt", "Bortfallsundersökning saknas", "ej tagit hänsyn till att skolorna har olika antal elever". (Ma B VT 2008)

6. De ska inte hyra. (Ma B HT 2009)

7. Bortfallsundersökningen påverkar inte det ursprungliga resultatet. (Ma B HT 2009)

8. a) Godtagbar kommentar, t.ex. ”Cirkeldiagrammet vill visa att nästan alla i området trivs men det var ju bara cirka hälften som svarade.”

   b) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer nedre gräns +1 vg med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (49 - 95 %) (Ma B HT 2011)

9. a) 65 %

   b) beräknar antalet ”ja-svar” i bortfallsgruppen, 215 st
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (t.ex. ”280 ja-svar är mer än hälften och man har stöd för inköp av musikanläggningen”) (Ma B HT 2012)

10. a) $y = -0{,}05x + 140$

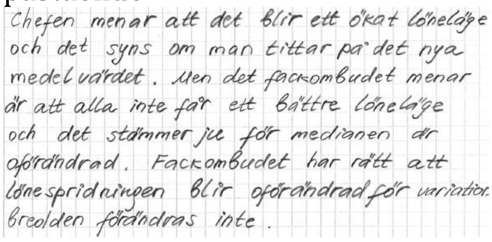
    b) 15 fågelarter (Ma B HT 2010)

11. det kan finnas många i bortfallet som vill ha vanligt gräs
    det kan vara möjligt att det finns en majoritet för vanligt gräs (Ma B VT 2010)

12. l, 2, 4, 5 och 13 (Ma B HT 2009)

13. Dante har rätt (Ma B VT 2012)

14. Godtagbar bestämning av övriga statistiska mått före och efter förändringen (medelvärde: 98,2 respektive 100,6; median: 100 respektive 100; variationsbredd: 30 respektive 30) medelvärdet styrker chefens påstående, median och variationsbredd styrker fackombudets påstående

    
    Chefen menar att det blir ett ökat löneläge
    och det syns om man tittar på det nya
    medelvärdet. Men det fackombudet menar
    är att alla inte får ett bättre löneläge
    och det stämmer ju för medianen är
    oförändrad. Fackombudet har rätt att
    lönespridningen blir oförändrad för variation
    breolden förändras inte.

    (Ma B HT 2010)

15. a) t.ex. 13,0; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5

    b) variationsbredden ligger i intervallet $0 \text{ cm} \leq Vb < 15 \text{ cm}$ (Ma B VT 2011)

16. a) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer linjens k-värde till ett värde i intervallet $-1{,}5 \leq k \leq -1{,}0$ t.ex. $y = -1{,}3x + 21{,}5$

    b) t.ex. 9,0 m

    c) Modellen stämmer inte för långsammare tider eftersom en person som springer på 20 sekunder får en negativ hopplängd. (Ma B HT 2012)